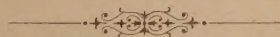


SUR LA THÉORIE DES OSCILLATIONS ÉLECTRIQUES

PAR

A. ROSÉN.

Denna afhandling kommer att, med tillstånd af Matematiskt Naturvetenskapliga
sektionen i Lund, offentligen försvaras å auditoriet N:o 6,
Lördagen den 23 April 1892 kl. 11 f. m.



LUND, 1892.

BERLINGSKA BOKTRYCKERI- OCH STILGJUTERI-AKTIEBOLAGET.

Sur la théorie des oscillations électriques

par

A. ROSÉN.

Les phénomènes des oscillations électriques ont été étudiés à deux points de vue différents. D'une part on a, comme M. Hertz dans ses premières recherches, poursuivi l'étude qualitative des analogies entre les oscillations électriques et les vibrations lumineuses. C'est ainsi qu'on a constaté la réflexion des ondes électriques par les corps conducteurs, la réflexion et la réfraction causées par les diélectriques, l'interférence etc. D'autres ont cherché à faire des recherches quantitatives, et ce sont surtout les vitesses avec lesquelles les ondes se propagent dans les milieux différents qu'on a cherché à mesurer. Comme on pouvait s'y attendre, les expériences de la seconde classe sont loin d'avoir donné des résultats aussi concordants que celles de la première. Depuis qu'on possédait le moyen d'exciter des oscillations électriques de période assez courte et de constater leur propagation, on était guidé dans les expériences du premier genre par l'analogie avec les phénomènes de la lumière. On n'avait qu'à exécuter les expériences de la même manière que quand il s'agissait de la lumière, seulement dans des dimensions plus grandes. Mais ces analogies faisant défaut pour les expériences de la seconde classe, ce n'est qu'avec bien des tâtonnements que les expérimentateurs ont pu poursuivre leurs recherches. Cependant on pourrait procéder d'une autre manière. Comme la théorie de Maxwell semble être la seule qui puisse donner une explication des effets observés des oscillations, on pourrait traiter, en prenant cette théorie pour point de départ, un simple pro-

blème et chercher ensuite à réaliser expérimentalement, d'aussi près que possible, les conditions du problème.

M. Hertz a donné lui-même une théorie succincte des principaux traits de ses expériences (Annales de Wiedemann, t. XXXVI) et M. Poincaré a consacré quelques chapitres de la seconde partie de son livre *Électricité et Optique* à une étude approfondie des expériences de M. Hertz. Mais il n'y a point eu de recherches spéciales, que je sache, sur la théorie mathématique des oscillations, excepté dans un mémoire de M. Poincaré inséré dans les Comptes Rendus (octobre 1891), où il déduit un théorème remarquable qui rattache la théorie des oscillations à celle de l'attraction, et dans un mémoire de M. Kolacek (Wiedemann, t. XLIII) qui traite d'un cas particulier des oscillations autour d'un ellipsoïde de révolution.

Dans ce mémoire, après avoir déduit quelques résultats généraux touchant les courants variables, j'ai traité principalement le problème de déterminer l'effet produit par l'introduction d'un cylindre conducteur dans un champ où se propagent des ondes électriques.

§ 1.

J'emploierai les équations fondamentales de la théorie de Maxwell sous la forme simple que leur a donnée M. Hertz dans le mémoire *Über die Grundgleichungen der Elektrodynamik für ruhende Körper* (Annales de Wiedemann, t. XL, p. 587):

$$(1a) \begin{cases} A\mu \frac{dL}{dt} = \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}, \\ A\mu \frac{dM}{dt} = \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx}, \\ A\mu \frac{dN}{dt} = \frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy}, \end{cases} \quad (1b) \begin{cases} A\varepsilon \frac{dX}{dt} = \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy} - 4\pi\lambda AX, \\ A\varepsilon \frac{dY}{dt} = \frac{dN}{dx} - \frac{dL}{dz} - 4\pi\lambda AY, \\ A\varepsilon \frac{dZ}{dt} = \frac{dL}{dy} - \frac{dM}{dx} - 4\pi\lambda AZ. \end{cases}$$

L , M , N sont les composantes de la force magnétique en un point quelconque; X , Y , Z celles de la force électrique; A est l'inverse de la vitesse avec laquelle les actions électriques se propagent dans le vide; μ le coefficient de perméabilité magnétique du milieu, ε son pouvoir inducteur, λ sa conductibilité électrique. Les directions des axes des coordonnées sont choisies de manière que, si l'axe des x est dirigé en avant et l'axe des y à droite, l'axe des z est dirigé en haut.

Les équations (1a) expriment que, si l'on prend un élément de surface d'une direction arbitraire, l'intégrale de la force électrique le long du contour de la surface est proportionnelle à la variation de la polarisation magnétique normale dans la surface. La direction dans laquelle on parcourt le contour doit être telle que, vue du côté de la surface vers lequel la force magnétique est dirigée, elle coïncide avec la direction du mouvement des aiguilles d'une montre. Les équations (1b) expriment que, si l'on prend un élément de surface, l'intégrale de la force magnétique le long de son contour est proportionnelle au courant électrique total à travers l'élément (c'est-à-dire à la somme du courant de déplacement et du courant de conduction). Cette fois le contour doit être parcouru dans une telle direction que, vu du côté de la surface vers lequel le courant est dirigé, le mouvement est opposé à celui des aiguilles d'une montre.

Les quantités L , M , N satisfont en outre à cette relation dans tout l'espace (l. c. p. 583):

$$(1c) \quad \frac{dL}{dx} + \frac{dM}{dy} + \frac{dN}{dz} = 0,$$

et les quantités X , Y , Z dans tous les milieux isolants, c'est-à-dire pour lesquels $\lambda = 0$, à cette équation:

$$(1d) \quad \frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} = 0.$$

Ces équations expriment que l'intégrale de la polarisation magnétique ou électrique sur une surface fermée est nulle.

La quantité d'énergie renfermée dans l'unité de volume du milieu égale (l. c. p. 582)

$$(1e) \quad \frac{\epsilon}{8\pi} (X^2 + Y^2 + Z^2) + \frac{\mu}{8\pi} (L^2 + M^2 + N^2).$$

Les équations ne sont valables que pour des corps isotropes, mais excepté pour les équations (1c) et (1d), il n'est pas nécessaire de supposer le milieu homogène. Si le corps n'est pas homogène, c'est-à-dire si ϵ , μ , λ varient d'un point à l'autre, les équations (1c) et (1d) doivent subir un changement facile à voir.

Pour trouver les relations qui doivent avoir lieu près d'une surface de séparation de deux milieux différents, supposons (l. c. p. 589) cette surface remplacée par une couche très mince dans laquelle les constantes μ , ϵ , λ varient rapidement, mais continuellement, et supposons pour plus de simplicité que la

surface de séparation près du point considéré est parallèle au plan des xy . Les équations (1a) et (1b) sont valables aussi pour la couche. $X, Y, Z, \frac{dX}{dt}, \frac{dY}{dt}, \frac{dZ}{dt}, \frac{dL}{dt}, \frac{dM}{dt}, \frac{dN}{dt}$ restant finis, on voit que $\frac{dL}{dz}, \frac{dM}{dz}, \frac{dX}{dz}, \frac{dY}{dz}$ restent finis dans la couche. Il en résulte que si la couche est remplacée par une surface de séparation, les quantités L, M, X, Y doivent avoir la même valeur des deux côtés de la surface, c'est-à-dire la composante de la force magnétique ou électrique tangente à la surface de séparation a la même valeur des deux côtés de la surface. La quantité $\frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy}$ a donc aussi la même valeur des deux côtés de la surface: par conséquent, il en est de même de la quantité $\mu \frac{dN}{dt}$. Abstraction faite d'une polarisation magnétique possible, indépendante du temps, la grandeur de la polarisation magnétique normale à la surface est donc la même des deux côtés de la surface. On voit de la même manière que la composante normale du courant électrique a la même valeur des deux côtés de la surface.

Dans le cas où l'un des deux milieux est un isolant parfait, pour lequel donc $\lambda = 0$, et l'autre un conducteur parfait, pour lequel $\lambda = \infty$, cas qui nous occupera particulièrement, nous remarquons d'abord que les équations (1b) exigent que partout dans le milieu conducteur on ait $X = Y = Z = 0$. Les équations (1a) montrent ensuite, par le même raisonnement que nous avons fait tout à l'heure, que dans l'isolant X, Y et $\frac{dN}{dt}$ sont nuls près de la surface du conducteur. Donc près d'un conducteur parfait la force électrique est normale à la surface et la force magnétique y est parallèle (en supposant qu'il n'y a pas de polarisation magnétique indépendante du temps).

§ 2.

Lorenz a montré dans un mémoire "*Über die Identität der Schwingungen des Lichts mit den elektrischen Strömen*" (Annales de Poggendorff, t. 131) qu'on peut modifier les équations du mouvement de l'électricité établies par Kirchhoff de manière à les rendre identiques aux équations des vibrations de la lumière et qu'inversement, des équations de la lumière on peut retrouver celles de l'électricité. Quoique les raisonnements de ce paragraphe soient en partie

presque identiques à ceux de Lorenz, je ne puis les omettre parce que je déduirai quelques résultats que je crois nouveaux et que j'emploierai dans les §§ suivants.

L'ancienne électrodynamique donne, si l'on choisit convenablement les unités des forces, les formules suivantes pour l'action des courants fermés.

Soient u , v , w les composantes parallèles aux axes des coordonnées de l'intensité du courant au point xyz . Formons les intégrales

$$F = \int \frac{u d\tau}{r}, \quad G = \int \frac{v d\tau}{r}, \quad H = \int \frac{w d\tau}{r},$$

où $d\tau$ désigne l'élément de volume qui a son point de gravité au point xyz et r la distance du point xyz au point $x'y'z'$. Les intégrales sont étendues sur tous les corps où il y a des courants ou, ce qui revient au même, sur tout l'espace, parce que les éléments des intégrales sont nuls dans les parties de l'espace où il n'y a pas de courants. Alors on a les expressions suivantes pour les composantes de la force magnétique exercée par les courants au point $x'y'z'$, en choisissant les directions des axes des coordonnées comme dans le § 1:

$$L = \frac{dG}{dz'} - \frac{dH}{dy'}, \quad M = \frac{dH}{dx'} - \frac{dF}{dz'}, \quad N = \frac{dF}{dy'} - \frac{dG}{dx'},$$

et pour les composantes de la force électrique causée au point $x'y'z'$ par la variation des courants:

$$X = -\frac{dF}{dt}, \quad Y = -\frac{dG}{dt}, \quad Z = -\frac{dH}{dt}.$$

On appelle F , G , H les composantes du potentiel vecteur du système de courants.

Pour des courants fermés et qui ne varient pas trop rapidement, ces formules s'accordent parfaitement avec les expériences. Pour les accommoder au cas où il s'agit de courants non fermés et qui varient d'une manière arbitraire nous introduisons ces modifications: 1:o) Aux expressions données pour les composantes de la force électrique nous ajoutons respectivement les termes

$$-\frac{d\Psi}{dx}, \quad -\frac{d\Psi}{dy}, \quad -\frac{d\Psi}{dz},$$

représentant les composantes de la force exercée par l'électricité statique qui accompagne les courants non fermés; ces composantes peuvent être déduites d'un potentiel Ψ ; 2:o) Nous supposons que, pour ainsi dire, le potentiel se propage avec une vitesse a égale au nombre d'unités électrostatiques d'électricité conte-

nues dans l'unité électromagnétique, c'est-à-dire si la densité de l'électricité dans un élément de volume $d\tau$ est une fonction du temps $\varrho(t)$, le potentiel de cet élément, en un point situé à la distance r , est proportionnel à

$$\frac{\varrho(t - \frac{r}{a})}{r},$$

et si $u(t)$, $v(t)$, $w(t)$ désignent les composantes de l'intensité du courant dans l'élément, les composantes du potentiel vecteur sont

$$\frac{u(t - \frac{r}{a})}{r}, \quad \frac{v(t - \frac{r}{a})}{r}, \quad \frac{w(t - \frac{r}{a})}{r}.$$

Nous aurons donc:

$$\begin{aligned} L &= \frac{dG}{dz'} - \frac{dH}{dy'}, & X &= -\frac{dF}{dt} - \frac{d\Psi}{dx'}, \\ M &= \frac{dH}{dx'} - \frac{dF}{dz'}, & Y &= -\frac{dG}{dt} - \frac{d\Psi}{dy'}, \\ N &= \frac{dF}{dy'} - \frac{dG}{dx'}, & Z &= -\frac{dZ}{dt} - \frac{d\Psi}{dz'}. \end{aligned}$$

De ces formules on tire immédiatement

$$\frac{dL}{dt} = \frac{dZ}{dy'} - \frac{dY}{dz'}, \quad \frac{dM}{dt} = \frac{dX}{dz'} - \frac{dZ}{dx'}, \quad \frac{dN}{dt} = \frac{dY}{dx'} - \frac{dX}{dy'},$$

qui sont les mêmes équations que les équations (1a) du § 1, si l'on change convenablement les unités. On obtient aussi l'équation

$$\frac{dL}{dx'} + \frac{dM}{dy'} + \frac{dN}{dz'} = 0$$

qui vaut pour tout l'espace.

Les signes $\varrho(t)$, $u(t)$ etc. ont la même signification que ci-dessus. Pour $\varrho(t)$, $u(t)$ etc. nous écrirons aussi ϱ , u etc. Ces quantités satisfont à l'équation

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} + \frac{d\varrho}{dt} = 0,$$

qui exprime que l'augmentation de la quantité d'électricité statique dans un élément de volume égale la somme des quantités d'électricité amenées par le courant. Toutes les quantités d'électricité sont ici mesurées dans la même unité.

Pour Ψ , F , G , H on a ces expressions

$$\Psi = a^2 \int \frac{\varrho(t - \frac{r}{a}) d\tau}{r}, \quad F = \int \frac{u(t - \frac{r}{a})}{r} d\tau \text{ etc.}$$

Le facteur a^2 apparaît dans l'expression de Ψ si l'on veut que, comme dans les formules de l'électrostatique, le produit $e d\Psi$ désigne une quantité de travail effectué en portant la quantité d'électricité e du potentiel Ψ au potentiel $\Psi + d\Psi$.

Cherchons la valeur de l'expression

$$\frac{dF}{dx'} + \frac{dG}{dy'} + \frac{dH}{dz'}.$$

Comme $\frac{dr}{dx'} = -\frac{dr}{dx}$ on a

$$\frac{dF}{dx'} + \frac{dG}{dy'} + \frac{dH}{dz'} = - \int \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \frac{u(t - \frac{r}{a})}{r} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{v(t - \frac{r}{a})}{r} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{w(t - \frac{r}{a})}{r} \right\} d\tau,$$

où le signe ∂ indique que l'on doit différentier seulement par rapport à x, y, z entrant dans r . On a donc

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{u(t - \frac{r}{a})}{r} = \frac{d}{dx} \frac{u(t - \frac{r}{a})}{r} - \left[\frac{du}{dx} \right]_{t - \frac{r}{a}},$$

si l'on indique par le signe $[F]_{t - \frac{r}{a}}$ une fonction F de t , dans laquelle on a

substitué $t - \frac{r}{a}$ à t , et de même pour les deux autres termes dans l'intégrale. Donc

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dx'} + \frac{dG}{dy'} + \frac{dH}{dz'} = & - \int \left\{ \frac{d}{dx} \frac{u(t - \frac{r}{a})}{r} + \frac{d}{dy} \frac{v(t - \frac{r}{a})}{r} + \frac{d}{dz} \frac{w(t - \frac{r}{a})}{r} \right\} d\tau \\ & + \int \frac{d\tau}{r} \left[\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right]_{t - \frac{r}{a}}. \end{aligned}$$

Le premier terme du second membre se transforme en l'intégrale

$$- \int \frac{d\omega}{r} \left\{ l \cdot u(t - \frac{r}{a}) + m \cdot v(t - \frac{r}{a}) + n \cdot w(t - \frac{r}{a}) \right\}$$

étendue sur une surface renfermant tous les corps dans lesquels il y a des courants. $d\omega$ désigne l'élément de la surface; l, m, n sont les cosinus directeurs de la normale extérieure. Les quantités u, w, v , sont nulles dans la surface, et l'intégrale s'évanouit.

Le second terme peut s'écrire

$$- \int \frac{d\tau}{r} \left[\frac{d\varrho}{dt} \right]_{t - \frac{r}{a}} \quad \text{ou} \quad - \frac{d}{dt} \int \frac{\varrho(t - \frac{r}{a})}{r} d\tau.$$

c'est-à-dire
$$-\frac{1}{a^2} \frac{d\Psi}{dt}.$$

On a donc

$$\frac{dF}{dx'} + \frac{dG}{dy'} + \frac{dH}{dz'} + \frac{1}{a^2} \frac{d\Psi}{dt} = 0.$$

Dans les parties de l'espace où $u = 0$ F satisfait à l'équation

$$\Delta^2 F = \frac{1}{a^2} \frac{d^2 F}{dt^2} \quad (\Delta^2 = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}),$$

comme on le voit aisément. Dans tout l'espace F satisfait à l'équation

$$\Delta^2 F = \frac{1}{a^2} \frac{d^2 F}{dt^2} - 4\pi u$$

(dont la précédente n'est qu'un cas spécial). Pour le prouver, partageons (cfr Helmholtz, *Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden*, Journal de Crelle, t. 57, p. 19 ou Wissenschaftliche Abhandlungen, t. 1, p. 323) par une surface fermée infiniment petite, environnant le point $x'y'z'$, l'espace en deux parties, S_0 , près du point $x'y'z'$, et S_1 . Désignons par F_0 la partie de l'intégrale F qui est prise sur l'espace S_0 , et par F_1 la partie qui est prise sur l'espace F_1 . Dans S_0 on a

$$\Delta^2 F_1 = \frac{1}{a^2} \frac{d^2 F_1}{dt^2},$$

donc dans S_0

$$\Delta^2 F - \frac{1}{a^2} \frac{d^2 F}{dt^2} = \Delta^2 F_0 - \frac{1}{a^2} \frac{d^2 F_0}{dt^2}.$$

Dans S_0 on peut considérer $u(t)$ comme indépendant de xyz . La quantité

$$\frac{d^2 F_0}{dt^2} \text{ c'est-à-dire } \int \frac{d\tau}{r} \frac{d^2}{dt^2} u \left(t - \frac{r}{a} \right)$$

a une valeur infiniment petite. Posons

$$F_0 = \int \frac{1}{r} \left\{ u \left(t - \frac{r}{a} \right) - u(t) \right\} d\tau + \int \frac{1}{r} u(t) d\tau = F' + F''.$$

Alors on a

$$\Delta^2 F'' = -4\pi u(t)$$

et en effectuant les différentiations on trouve

$$\Delta^2 F' = \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{r} \frac{d^2 u}{dt^2} d\tau;$$

cette intégrale a une valeur infiniment petite. On a donc

$$\Delta^2 F - \frac{1}{a^2} \frac{d^2 F}{dt^2} = -4\pi u.$$

De la même manière on trouve que

$$\Delta^2 G - \frac{1}{a^2} \frac{d^2 G}{dt^2} = -4\pi v,$$

$$\Delta^2 H - \frac{1}{a^2} \frac{d^2 H}{dt^2} = -4\pi w,$$

$$\Delta^2 \Psi - \frac{1}{a^2} \frac{d^2 \Psi}{dt^2} = -4a^2 \pi \varrho.$$

Revenons aux formules qui donnent les composantes de la force électrique.

On a

$$X = -\frac{dF}{dt} - \frac{d\Psi}{dx},$$

par conséquent

$$\frac{dX}{dt} = -\frac{d^2 F}{dt^2} - \frac{d^2 \Psi}{dx dt} = -a^2 \Delta^2 F - 4\pi a^2 u - \frac{d^2 \Psi}{dx dt}.$$

On a

$$-\frac{d^2 F}{dx^2} = \frac{d^2 G}{dx dy} + \frac{d^2 H}{dx dz} + \frac{1}{a^2} \frac{d^2 \Psi}{dx dt},$$

et, si λ est la conductibilité électrique du milieu, on a $u = \lambda X$. Donc

$$\frac{1}{a^2} \frac{dX}{dt} = \frac{d^2 G}{dx dy} + \frac{d^2 H}{dx dz} - \frac{d^2 F}{dy^2} - \frac{d^2 F}{dz^2} - 4\pi \lambda X,$$

ou

$$\frac{1}{a^2} \frac{dX}{dt} = \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy} - 4\pi \lambda X,$$

et l'on obtient des équations analogues pour $\frac{dY}{dt}$ et $\frac{dZ}{dt}$. Ces équations sont

de la même forme que les équations (1b) du § 1. On a encore

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} &= -\frac{d}{dt} \left(\frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz} \right) - \Delta^2 \Psi \\ &= \frac{1}{a^2} \frac{d^2 \Psi}{dt^2} - \Delta^2 \Psi, \end{aligned}$$

expression qui devient égale à zéro pour un milieu isolant. Donc pour un tel milieu

$$\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} = 0.$$

[Dans les conducteurs, comme il a été démontré ci-dessus

$$\frac{1}{a^2} \frac{d^2 \Psi}{dt^2} - \Delta^2 \Psi = 4a^2 \pi \varrho, \text{ donc pour eux } \frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} = 4a^2 \pi \varrho.]$$

On voit donc que les expressions de la force électrique et de la force magnétique doivent satisfaire à des équations de même forme d'après la théorie de Maxwell et d'après l'ancienne théorie modifiée de la manière indiquée. Cherchons quelles relations la dernière théorie donne pour la surface de séparation de deux milieux, et, pour plus de simplicité, bornons-nous au cas où l'on a affaire à un isolant parfait en contact avec un conducteur parfait.

Pour le conducteur la condition $\lambda = \infty$ donne $X = Y = Z = 0$ dans tous les points. Donc $u = v = w = 0$ dans tout le conducteur et par conséquent, $\frac{d\varrho}{dt} = 0$. Les courants sont donc distribués entièrement dans la surface du conducteur, et par conséquent il peut aussi se trouver dans la surface une couche d'électricité statique de densité de volume infinie mais de densité superficielle finie. Nous avons donc cette fois les fonctions F, G, H, Ψ de cette forme

$$F = \int \frac{u(t - \frac{r}{a}) d\omega}{r}, \quad G = \int \frac{v(t - \frac{r}{a}) d\omega}{r}, \quad H = \int \frac{w(t - \frac{r}{a}) d\omega}{r},$$

$$\Psi = a^2 \int \frac{\sigma(t - \frac{r}{a}) d\omega}{r} + a^2 \int \frac{\varrho d\tau}{r},$$

où $d\omega$ désigne un élément de la surface du conducteur, u, v, w les composantes de l'intensité du courant superficiel, σ la densité superficielle de l'électricité dans la surface, ϱ comme auparavant la densité de l'électricité dans l'intérieur du conducteur. Les fonctions F etc. sont encore dans ce cas continues, mais leurs premières dérivées ne le sont pas quand on traverse la surface du conducteur. Traçons autour du point $x'y'z'$ de la surface une courbe fermée infiniment petite (cfr Helmholtz, l. c., Journal de Crelle p. 21 ou Wiss. Abh. p. 325), appelons S_0 la partie de la surface près de $x'y'z'$, S_1 le reste. Soit F_0 la partie de l'intégrale F qui est prise sur S_0 , F_1 celle qui est prise sur S_1 . Les dérivées de F_1 sont continues quand on traverse la surface S_0 . Posons

$$F_0 = \int \frac{d\omega}{r} \left\{ u(t - \frac{r}{a}) - u(t) \right\} + \int \frac{d\omega}{r} u(t) = F' + F''.$$

$u(t)$ peut être considéré comme indépendant de xyz dans S_0 . On trouve que

$$\frac{dF'}{dx} = \frac{1}{2a^2} \int \frac{x - x'}{r} \frac{d^2 u}{dt^2} d\omega,$$

cette intégrale a une valeur infiniment petite. Il en est de même avec

$$\frac{dF''}{dy} \text{ et } \frac{dF''}{dz}.$$

Donc les dérivées de F_0 et, par conséquent, aussi celles de F subissent, quand on traverse S_0 , le même changement brusque que celles de F'' . Mais pour F''' on sait que

$$\frac{dF'''}{dn} + \frac{dF'''}{dn'} = -4\pi u,$$

si n et n' signifient les normales vers les deux côtés de la surface, donc

$$\frac{dF'}{dn} + \frac{dF'}{dn'} = -4\pi u.$$

De même pour les fonctions G , H , Ψ .

Supposons, pour simplifier les raisonnements, que la surface près du point que nous voulons considérer soit parallèle au plan des xy et que le courant soit parallèle à l'axe des x . Donc $v = w = 0$ dans ce point. Alors toutes les dérivées du premier ordre de G et H sont continues, lorsqu'on traverse la surface dans le point considéré. Il en est de même de $\frac{dF}{dx}$, $\frac{dF}{dy}$, $\frac{d\Psi}{dx}$, $\frac{d\Psi}{dy}$. Mais

si $\frac{dF}{dz'}$ désigne la valeur de $\frac{dF}{dz}$ dans un point du conducteur près de la surface, on a

$$\frac{dF}{dz} - \frac{dF}{dz'} = -4\pi u \text{ et de même } \frac{d\Psi}{dz} - \frac{d\Psi}{dz'} = -4\pi a^2 \sigma.$$

X et Y doivent donc avoir les mêmes valeurs des deux côtés de la surface; elles sont nulles dans le conducteur, elles sont donc nulles aussi dans l'isolant. La force électrique est donc normale à la surface du conducteur. Sa grandeur est

$$Z = -\frac{dH}{dt} - \frac{d\Psi}{dz} = -\frac{dH}{dt} - \frac{d\Psi}{dz'} + 4\pi a^2 \sigma.$$

$-\frac{dH}{dt} - \frac{d\Psi}{dz'}$ est la valeur de Z dans le conducteur. Cette valeur est nulle, donc

$$Z = 4\pi a^2 \sigma.$$

Pour la force magnétique on trouve que L et N sont continues lorsqu'on

traverse la surface du conducteur. Si M' désigne la valeur de M dans le conducteur près de la surface, on a

$$M = \frac{dH}{dx} - \frac{dF}{dz} = \frac{dH}{dx'} - \frac{dF}{dz'} + 4\pi u = M' + 4\pi u.$$

On a toujours $\frac{dL}{dt}$, $\frac{dM}{dt}$, $\frac{dN}{dt}$ nuls dans le conducteur, si on suppose que

L , M , N soient nuls aussi, on a donc L et N nuls dans l'isolant près de la surface du conducteur, et $M = 4\pi u$. Donc dans ce cas la force magnétique dans l'isolant est parallèle à la surface du conducteur, normale au courant, et égale à l'intensité du courant multipliée par 4π . Sa direction est telle que si l'on fait coïncider l'axe des x avec la direction du courant et l'axe des z avec la normale extérieure de la surface, elle coïncide avec l'axe des y . [Les directions des axes doivent être choisies de la manière indiquée dans le § 1].

On a toujours la force électrique normale à la surface du conducteur et égale à la densité de l'électricité multipliée par 4π .

Donc, les conditions qui doivent être remplies à la surface de séparation de deux corps (du moins quand il s'agit d'un isolant parfait et d'un conducteur parfait) sont encore les mêmes dans la théorie de Maxwell et la théorie qui suppose un fluide électrique en mouvement dans les conducteurs. On peut donc employer, selon les circonstances, l'une ou l'autre méthode pour la solution des problèmes.

Bien des problèmes dans la théorie des oscillations électriques sont de la forme suivante: dans un certain corps il y a des courants variant d'une manière connue; il s'agit de connaître la force électrique et magnétique dans tout l'espace, lorsqu'il y a des corps conducteurs distribués d'une manière connue. On peut y arriver de deux manières. Ou l'on détermine des expressions de la force électrique et magnétique qui satisfassent dans l'air aux équations (1a), (1b), (1c), et telles que la force électrique soit normale et la force magnétique parallèle à la surface des conducteurs, ou bien on cherche à distribuer des courants et de l'électricité dans les surfaces des conducteurs de manière à rendre nulle la force électrique dans tous les conducteurs.

§ 3.

Les formules du précédent paragraphe ont une grande analogie avec certaines formules de l'électrostatique. Je montrerai dans le paragraphe qui va suivre une autre analogie de cette espèce.

En électrostatique on démontre que l'action d'un système électrique arbitraire, dans tout l'espace au-delà d'une surface fermée renfermant le système, peut être remplacée par l'action d'une certaine distribution sur cette surface elle-même. L'action de cette distribution dans des points situés du même côté de la surface que le système donné est nulle. Essayons de remplacer l'action d'un système arbitraire de courants et d'électricité libre par l'action de courants et d'électricité distribués sur une surface fermée S environnant le système donné.

Pour le potentiel de l'électricité libre on a

$$\begin{aligned}\Psi &= a^2 \int \frac{d\tau}{r} \varrho \left(t - \frac{r}{a} \right) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{d\tau}{r} \left[\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} \right]_{t - \frac{r}{a}} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int d\tau \left\{ \frac{d}{dx} \frac{X(t - \frac{r}{a})}{r} + \frac{d}{dy} \frac{Y(t - \frac{r}{a})}{r} + \frac{d}{dz} \frac{Z(t - \frac{r}{a})}{r} \right\} + \\ &+ \frac{1}{4\pi} \frac{d}{dx'} \int \frac{d\tau}{r} X(t - \frac{r}{a}) + \frac{1}{4\pi} \frac{d}{dy'} \int \frac{d\tau}{r} Y(t - \frac{r}{a}) + \frac{1}{4\pi} \frac{d}{dz'} \int \frac{d\tau}{r} Z(t - \frac{r}{a}).\end{aligned}$$

$x'y'z'$ sont les coordonnées du point attiré. Les intégrales sont étendues sur tout l'espace renfermé par S , $d\tau$ désigne l'élément de volume. La première intégrale peut être remplacée par une intégrale étendue sur S . (l, m, n sont les cosinus directeurs de la normale extérieure de la surface, $d\omega$ l'élément de la surface). Alors

$$\begin{aligned}4\pi\Psi &= \int \frac{d\omega}{r} [lX + mY + nZ]_{t - \frac{r}{a}} \\ &+ \frac{d}{dx'} \int \frac{d\tau}{r} X(t - \frac{r}{a}) + \frac{d}{dy'} \int \frac{d\tau}{r} Y(t - \frac{r}{a}) + \frac{d}{dz'} \int \frac{d\tau}{r} Z(t - \frac{r}{a}).\end{aligned}$$

Pour la composante suivant l'axe des x du potentiel vecteur des courants on a

$$\begin{aligned}F &= \int \frac{d\tau}{r} u \left(t - \frac{r}{a} \right) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{d\tau}{r} \left[\frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy} - \frac{1}{a^2} \frac{dX}{dt} \right]_{t - \frac{r}{a}} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int d\tau \left\{ \frac{d}{dz} \frac{M(t - \frac{r}{a})}{r} - \frac{d}{dy} \frac{N(t - \frac{r}{a})}{r} \right\} + \\ &+ \frac{1}{4\pi} \frac{d}{dz'} \int \frac{d\tau}{r} M(t - \frac{r}{a}) - \frac{1}{4\pi} \frac{d}{dy'} \int \frac{d\tau}{r} N(t - \frac{r}{a}) - \frac{1}{4\pi a^2} \frac{d}{dt} \int \frac{d\tau}{r} X(t - \frac{r}{a}).\end{aligned}$$

La première intégrale peut être transformée en une intégrale de surface.
Donc

$$4\pi F = \int \frac{d\omega}{r} [nM - mN]_{t - \frac{r}{a}} + \frac{d}{dz'} \int \frac{d\tau}{r} M(t - \frac{r}{a}) - \frac{d}{dy'} \int \frac{d\tau}{r} N(t - \frac{r}{a}) \\ - \frac{1}{a^2} \frac{d}{dt} \int \frac{d\tau}{r} X(t - \frac{r}{a}).$$

Pour la composante X de la force électrique on a

$$4\pi X = -4\pi \left(\frac{dF}{dt} + \frac{d\psi}{dx'} \right) = -\frac{d}{dt} \int \frac{d\omega}{r} [nM - mN]_{t - \frac{r}{a}} \\ - \frac{d}{dx'} \int \frac{d\omega}{r} [lX + mY + nZ]_{t - \frac{r}{a}} \\ - \frac{d^2}{dz' dt} \int \frac{d\tau}{r} M(t - \frac{r}{a}) + \frac{d^2}{dy' dt} \int \frac{d\tau}{r} N(t - \frac{r}{a}) + \frac{1}{a^2} \frac{d^2}{dt^2} \int \frac{d\tau}{r} X(t - \frac{r}{a}) \\ - \frac{d^2}{dx'^2} \int \frac{d\tau}{r} X(t - \frac{r}{a}) - \frac{d^2}{dx' dy'} \int \frac{d\tau}{r} Y(t - \frac{r}{a}) - \frac{d^2}{dx' dz'} \int \frac{d\tau}{r} Z(t - \frac{r}{a}).$$

Les six dernières intégrales du second membre doivent être transformées en des intégrales de surface. On a d'abord pour tous les points $x'y'z'$ de l'espace extérieur à S

$$\Delta^2 \int \frac{d\tau}{r} X(t - \frac{r}{a}) = \frac{1}{a^2} \frac{d^2}{dt^2} \int \frac{d\tau}{r} X(t - \frac{r}{a}),$$

donc

$$\frac{1}{a^2} \frac{d^2}{dt^2} \int \frac{d\tau}{r} X(t - \frac{r}{a}) - \frac{d^2}{dx'^2} \int \frac{d\tau}{r} X(t - \frac{r}{a}) = \left(\frac{d^2}{dy'^2} + \frac{d^2}{dz'^2} \right) \int \frac{d\tau}{r} X(t - \frac{r}{a}).$$

Donc les intégrales en question peuvent s'écrire sous la forme de ces deux termes:

$$\frac{d}{dy'} \left\{ \frac{d}{dy'} \int \frac{d\tau}{r} X(t - \frac{r}{a}) - \frac{d}{dx'} \int \frac{d\tau}{r} Y(t - \frac{r}{a}) + \frac{d}{dt} \int \frac{d\tau}{r} N(t - \frac{r}{a}) \right\} - \\ - \frac{d}{dz'} \left\{ \frac{d}{dz'} \int \frac{d\tau}{r} Z(t - \frac{r}{a}) - \frac{d}{dz'} \int \frac{d\tau}{r} X(t - \frac{r}{a}) + \frac{d}{dt} \int \frac{d\tau}{r} M(t - \frac{r}{a}) \right\}.$$

On a

$$\frac{d}{dy'} \int \frac{d\tau}{r} X(t - \frac{r}{a}) = - \int d\tau \frac{d}{dy} \frac{X(t - \frac{r}{a})}{r} + \int \frac{d\tau}{r} \left[\frac{dX}{dy} \right]_{t - \frac{r}{a}} \\ = - \int \frac{d\omega}{r} mX(t - \frac{r}{a}) + \int \frac{d\tau}{r} \left[\frac{dX}{dy} \right]_{t - \frac{r}{a}},$$

et de la même manière

$$\frac{d}{dx'} \int \frac{dx}{r} Y(t - \frac{r}{a}) = - \int \frac{d\omega}{r} lY(t - \frac{r}{a}) + \int \frac{dt}{r} \left[\frac{dY}{dx} \right]_{t - \frac{r}{a}}$$

On peut donc écrire le premier terme ainsi:

$$\frac{d}{dy'} \left\{ \int \frac{d\omega}{r} [lY - mX]_{t - \frac{r}{a}} + \int \frac{dx}{r} \left[\frac{dX}{dy} - \frac{dY}{dx} + \frac{dN}{dt} \right]_{t - \frac{r}{a}} \right\}$$

et le second terme peut être transformé d'une manière analogue.

Mais selon le § précédent on a

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy},$$

donc la seconde intégrale de la parenthèse est nulle, et l'expression de X est transformée en une somme d'intégrales doubles:

$$\begin{aligned} 4\pi X = & - \frac{d}{dt} \int \frac{d\omega}{r} [nM - mN]_{t - \frac{r}{a}} - \frac{d}{dx'} \int \frac{d\omega}{r} [lX + mY + nZ]_{t - \frac{r}{a}} \\ & + \frac{d}{dy'} \int \frac{d\omega}{r} [lY - mX]_{t - \frac{r}{a}} - \frac{d}{dz'} \int \frac{d\omega}{r} [nX - lZ]_{t - \frac{r}{a}}. \end{aligned}$$

Cette expression et les expressions analogues qu'on peut déduire pour Y et Z montrent que la même force électrique que celle exercée par le système donné peut être exercée par un système distribué sur la surface S . Ce système consiste en:

1:o) Un système de courants dont l'intensité en chaque point de la surface a les composantes

$$\frac{1}{4\pi} (nM - mN), \quad \frac{1}{4\pi} (lN - nL), \quad \frac{1}{4\pi} (mL - lM).$$

L'intensité est donc égale à la composante tangentielle de la force magnétique multipliée par $\frac{1}{4\pi}$, et la direction du courant est normale à celle de la force magnétique.

2:o) Une couche d'électricité libre dont la densité en chaque point est

$$\frac{1}{4\pi} (lX + mY + nZ),$$

c'est-à-dire est égale à la composante normale à la surface de la force électrique multipliée par $\frac{1}{4\pi}$.

Si on pose $X = \frac{d\xi}{dt}$, $Y = \frac{d\eta}{dt}$, $Z = \frac{d\zeta}{dt}$, ξ , η , ζ sont les composantes du moment électrokinétique, et les deux derniers termes de l'expression de $4\pi X$ peuvent s'écrire

$$-\frac{d}{dt} \left\{ \frac{d}{dz'} \int \frac{d\omega}{r} [n\xi - l\zeta]_t - \frac{r}{a} - \frac{d}{dy} \int \frac{d\omega}{r} [l\eta - m\xi]_t - \frac{r}{a} \right\}.$$

L'expression entre parenthèses et les expressions analogues qui se trouvent dans Y et Z peuvent être interprétées comme les composantes du potentiel vecteur d'un système de solénoïdes distribués sur la surface. Car pour les composantes du potentiel vecteur d'un courant fermé d'intensité $i(t)$, on a les expressions:

$$\int i(t - \frac{r}{a}) \frac{dx}{r}, \quad \int i(t - \frac{r}{a}) \frac{dy}{r}, \quad \int i(t - \frac{r}{a}) \frac{dz}{r},$$

ou, en employant une formule de transformation connue:

$$\int \left\{ n \frac{d}{dy} \frac{i(t - \frac{r}{a})}{r} - m \frac{d}{dz} \frac{i(t - \frac{r}{a})}{r} \right\} d\omega,$$

$$\int \left\{ l \frac{d}{dz} \frac{i(t - \frac{r}{a})}{r} - n \frac{d}{dx} \frac{i(t - \frac{r}{a})}{r} \right\} d\omega,$$

$$\int \left\{ m \frac{d}{dx} \frac{i(t - \frac{r}{a})}{r} - l \frac{d}{dy} \frac{i(t - \frac{r}{a})}{r} \right\} d\omega,$$

ou

$$\frac{d}{dz'} \int \frac{d\omega}{r} m i(t - \frac{r}{a}) - \frac{d}{dy'} \int \frac{d\omega}{r} n i(t - \frac{r}{a}) \text{ etc.}$$

l , m , n sont les cosinus directeurs de la normale d'une surface arbitraire passant par le circuit, $d\omega$ l'élément de cette surface.

Les expressions en question sont donc les composantes du potentiel vecteur d'un système de solénoïdes tel que le produit de l'intensité du courant et de la distance des courants (ou le moment magnétique par unité de surface) a pour composantes:

$$m\xi - n\eta, \quad n\xi - l\zeta, \quad l\eta - m\xi.$$

Le système cherché sur la surface S consiste donc

3:0) En un système de solénoïdes tel que nous l'avons décrit. Le moment magnétique par unité de surface est égal à la composante tangentielle du moment électrokinétique multiplié par $\frac{1}{4\pi}$. L'axe du solénoïde en un certain point est situé dans la surface et normal à ce même vecteur. Les courants

des solénoïdes sont donc dans la direction de la composante tangentielle de ce vecteur.

Comme on a $\frac{dL}{dt} = \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}$ etc., on voit que l'action magnétique du système distribué sur S ne peut différer de l'action magnétique du système donné que par un système de forces indépendant du temps.

On vérifie aisément que le système distribué sur S n'agit pas sur les points intérieurs. Si nous prenons l'expression de $4\pi X$, les intégrales de surface peuvent être maintenant transformées en des intégrales de volume étendues sur tout l'espace extérieur à S . On obtient

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int d\tau \left\{ \frac{d}{dz} \frac{M(t - \frac{r}{a})}{r} - \frac{d}{dy} \frac{N(t - \frac{r}{a})}{r} \right\} + \frac{d}{dx'} \int d\tau' \left\{ \frac{d}{dx} \frac{X(t - \frac{r}{a})}{r} + \frac{d}{dy} \frac{Y(t - \frac{r}{a})}{r} + \frac{d}{dz} \frac{Z(t - \frac{r}{a})}{r} \right\} \\ & - \frac{d}{dy'} \int d\tau' \left\{ \frac{d}{dx} \frac{Y(t - \frac{r}{a})}{r} - \frac{d}{dy} \frac{X(t - \frac{r}{a})}{r} \right\} + \frac{d}{dz'} \int d\tau' \left\{ \frac{d}{dz} \frac{X(t - \frac{r}{a})}{r} - \frac{d}{dx} \frac{Z(t - \frac{r}{a})}{r} \right\} \text{ ou } \\ & \frac{d}{dt} \int \frac{d\tau}{r} \left[\frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy} \right]_{t - \frac{r}{a}} - \frac{d^2}{dt dz'} \int \frac{d\tau}{r} M(t - \frac{r}{a}) + \frac{d^2}{dt dy'} \int \frac{d\tau}{r} N(t - \frac{r}{a}) + \\ & + \frac{d}{dx'} \int \frac{d\tau}{r} \left[\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} \right]_{t - \frac{r}{a}} - \frac{d^2}{dx'^2} \int \frac{d\tau}{r} X(t - \frac{r}{a}) - \frac{d^2}{dx' dy'} \int \frac{d\tau}{r} Y(t - \frac{r}{a}) - \\ & - \frac{d^2}{dx' dz'} \int \frac{d\tau}{r} Z(t - \frac{r}{a}) - \frac{d}{dy'} \int \frac{d\tau}{r} \left[\frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy} \right]_{t - \frac{r}{a}} + \frac{d^2}{dx' dy'} \int \frac{d\tau}{r} Y(t - \frac{r}{a}) - \\ & - \frac{d^2}{dy'^2} \int \frac{d\tau}{r} Y(t - \frac{r}{a}) + \frac{d}{dz'} \int \frac{d\tau}{r} \left[\frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx} \right]_{t - \frac{r}{a}} - \frac{d^2}{dz'^2} \int \frac{d\tau}{r} X(t - \frac{r}{a}) + \frac{d^2}{dx' dz'} \int \frac{d\tau}{r} Z(t - \frac{r}{a}). \end{aligned}$$

Comme dans l'espace extérieur $\frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy} = \frac{1}{a^2} \frac{dX}{dt}$ et $\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} = 0$, tous les termes se détruisent.

Un théorème analogue concernant les courants fermés dont l'action se propage instantanément a été publié par moi il y a quelques années. (Bulletin de l'Ac. Suéd. des Sciences, 1887, n:o 9.)

§ 4.

Comme application des résultats du § 2 nous allons résoudre un simple problème.

Considérons un circuit fermé traversé par des courants périodiques, ayant à tout moment la même intensité dans tous les points du circuit, et cherchons la distribution des courants qui sont par là induits dans un conducteur voisin. Nous résoudrons ce problème pour le cas où le conducteur voisin est un disque plan d'étendue infinie.

Nous supposons ici et dans tout ce qui suit que les conducteurs sont parfaits, c'est-à-dire que leur résistance est nulle; les expériences ayant prouvé que pour les oscillations rapides tous les métaux remplissent cette condition.

Si l'on a un circuit fini, l'action de celui-ci est la somme des actions d'un nombre infini de circuits fermés infiniment petits. Car si l'on conçoit une surface arbitraire, limitée par le circuit, on peut partager par deux séries de courbes cette surface en des rectangles infiniment petits, et puis substituer à l'action du courant donné la somme des actions de courants de même intensité, circulant dans la même direction autour de tous ces rectangles. On peut donc supposer le circuit dont il s'agit infiniment petit.

Si l'intensité du courant est $i \cos 2\pi nt$, les expressions des composantes du potentiel vecteur au point $x'y'z'$ sont:

$$i \int \frac{\cos 2\pi n(t - \frac{r}{a})}{r} dx, \quad i \int \frac{\cos 2\pi n(t - \frac{r}{a})}{r} dy, \quad i \int \frac{\cos 2\pi n(t - \frac{r}{a})}{r} dz,$$

où r est la distance du point xyz au point $x'y'z'$ et où l'intégration doit être faite le long du circuit dans la direction du courant. Par une transformation connue ces expressions peuvent s'écrire:

$$\begin{aligned} & i \int \left\{ n \frac{d}{dy} \frac{\cos 2\pi n(t - \frac{r}{a})}{r} - m \frac{d}{dz} \frac{\cos 2\pi n(t - \frac{r}{a})}{r} \right\} d\omega, \\ & i \int \left\{ l \frac{d}{dz} \frac{\cos 2\pi n(t - \frac{r}{a})}{r} - n \frac{d}{dx} \frac{\cos 2\pi n(t - \frac{r}{a})}{r} \right\} d\omega, \\ & i \int \left\{ m \frac{d}{dx} \frac{\cos 2\pi n(t - \frac{r}{a})}{r} - l \frac{d}{dy} \frac{\cos 2\pi n(t - \frac{r}{a})}{r} \right\} d\omega. \end{aligned}$$

L'intégrale doit être prise sur une surface arbitraire limitée par le circuit; $d\omega$ désigne l'élément de cette surface; l , m , n sont les cosinus directeurs de la normale menée dans une direction telle que, vu d'elle, le courant circule autour de la surface dans une direction opposée à celle du mouvement des aiguilles d'une montre.

Supposons le circuit infiniment petit, et la surface plane qu'il renferme égale à $d\omega$. Soit le produit $id\omega$ désigné par A . Les composantes du potentiel vecteur sont alors:

$$A \left\{ n \frac{d}{dy} \frac{\cos 2\pi n(t - \frac{r}{a})}{r} - m \frac{d}{dz} \frac{\cos 2\pi n(t - \frac{r}{a})}{r} \right\} \text{ etc.}$$

ou

$$A \left\{ m \frac{d}{dz'} \frac{\cos 2\pi n(t - \frac{r}{a})}{r} - n \frac{d}{dy'} \frac{\cos 2\pi n(t - \frac{r}{a})}{r} \right\} \text{ etc.}$$

La distribution des courants dans la surface du conducteur doit maintenant être déterminée à l'aide de la condition que la résultante de la force électrique exercée par le circuit et de celle exercée par les courants du conducteur doit être normale à la surface du conducteur et que la résultante des deux forces magnétiques doit être parallèle à la surface. Il est donc facile de voir que l'action des courants du conducteur est la même que l'action d'un circuit infiniment petit dans une position convenable.

Supposons que la surface du disque regardant le circuit soit prise pour plan des xy ; que le circuit soit placé au point $0, 0, z$; au point symétrique $0, 0, -z$ plaçons un circuit traversé par un courant de l'intensité $i' \cos 2\pi nt$ et renfermant une surface plane égale à $d\omega'$; désignons le produit $i'd\omega'$ par B ; désignons par l', m', n' les cosinus directeurs de la normale du plan de ce circuit menée de la même manière que ci-dessus. Les composantes de la force électrique totale exercée au point $x'y'z'$ par les deux circuits sont alors:

$$X = 2\pi n A \left\{ m \frac{d}{dz'} \frac{\sin 2\pi n(t - \frac{r}{a})}{r} - n \frac{d}{dy'} \frac{\sin 2\pi n(t - \frac{r}{a})}{r} \right\} +$$

$$+ 2\pi n B \left\{ m' \frac{d}{dz'} \frac{\sin 2\pi n(t - \frac{r'}{a})}{r'} - n' \frac{d}{dy'} \frac{\sin 2\pi n(t - \frac{r'}{a})}{r'} \right\},$$

avec des expressions analogues pour Y et Z . [r' la distance du point $0, 0, -z'$ au point $x'y'z'$.]

Pour les composantes L, M, N de la force magnétique au point $x'y'z'$ on a:

$$L = A \left(n \frac{d^2}{dx'dz'} - l \frac{d^2}{dz'^2} - l' \frac{d^2}{dy'^2} + m \frac{d^2}{dx'dy'} \right) \frac{\cos 2\pi n(t - \frac{r}{a})}{r} +$$

$$+ B \left(n' \frac{d^2}{dx'dz'} - l' \frac{d^2}{dy'^2} - l \frac{d^2}{dz'^2} + m' \frac{d^2}{dx'dy'} \right) \frac{\cos 2\pi n(t - \frac{r'}{a})}{r'}$$

ou, parce que

$$A^2 \frac{\cos 2\pi n(t - \frac{r}{a})}{r} = -\frac{4\pi^2 n^2}{a^2} \cdot \frac{\cos 2\pi n(t - \frac{r}{a})}{r},$$

$$L = A \frac{d}{dx'} \left(l \frac{d}{dx'} + m \frac{d}{dy'} + n \frac{d}{dz'} \right) \frac{\cos 2\pi n(t - \frac{r}{a})}{r} +$$

$$+ B \frac{d}{dx'} \left(l' \frac{d}{dx'} + m' \frac{d}{dy'} + n' \frac{d}{dz'} \right) \frac{\cos 2\pi n(t - \frac{r'}{a})}{r'} +$$

$$+ \frac{4\pi^2 n^2}{a^2} \left\{ A l' \frac{\cos 2\pi n(t - \frac{r}{a})}{r} + B l' \frac{\cos 2\pi n(t - \frac{r'}{a})}{r'} \right\}$$

et des expressions analogues pour M et N .

Pour $z' = 0$ on doit avoir $X = Y = N = 0$. Comme alors $r = r'$ et

$$\frac{dr}{dx'} = \frac{dr'}{dx''} \quad \frac{dr}{dy'} = \frac{dr'}{dy''} \quad \frac{dr}{dz'} = -\frac{dr'}{dz''}$$

on trouve les conditions:

$$Al = Bl', \quad Am = Bm', \quad An = -Bn';$$

donc

$$A = B, \quad l = l', \quad m = m', \quad n = -n'.$$

Sous ces conditions le second circuit exerce la même action que les courants dans la surface du disque.

La composante de la force électrique normale à la surface devient

$$Z = 4\pi n A \left(l \frac{d}{dy'} - m \frac{d}{dx'} \right) \frac{\sin 2\pi n(t - \frac{r}{a})}{r}.$$

Les composantes de la force magnétique parallèles à la surface:

$$L = 2A \frac{d}{dx'} \left(l \frac{d}{dx'} + m \frac{d}{dy'} + n \frac{d}{dz'} \right) \frac{\cos 2\pi n(t - \frac{r}{a})}{r} + \frac{8\pi^2 n^2}{a^2} A l \frac{\cos 2\pi n(t - \frac{r}{a})}{r},$$

$$M = 2A \frac{d}{dy'} \left(l \frac{d}{dx'} + m \frac{d}{dy'} + n \frac{d}{dz'} \right) \frac{\cos 2\pi n(t - \frac{r}{a})}{r} + \frac{8\pi^2 n^2}{a^2} A m \frac{\cos 2\pi n(t - \frac{r}{a})}{r}.$$

Par ce que nous avons trouvé ci-dessus (p. 11) on voit que, si σ désigne la densité de l'électricité statique en un point de la surface et si u, v désignent les composantes du courant à ce point, on a:

$$4\pi a^2 \sigma = Z, \quad 4\pi u = M, \quad 4\pi v = -L,$$

En particulier, si le plan du circuit est parallèle à la surface, on a $l = m = 0$. Alors il n'y a pas d'électricité statique; les courants sont concentriques et de l'intensité

$$\frac{1}{2\pi} A \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2}}{r} \frac{d^2}{dr dz'} \frac{\cos 2\pi n(t - \frac{r}{a})}{r}.$$

§ 5.

Dans le mémoire cité de M. Helmholtz (Crelle, p. 26; Wiss. Abh. p. 331) on voit que si tous les conducteurs sont situés à une distance finie, les expressions des potentiels pour des valeurs très grandes des coordonnées se réduisent approximativement à:

$$\frac{\Phi}{r} \cos \frac{2\pi n(t - \frac{r}{a} - \tau)}{r},$$

où r est la distance de l'origine des coordonnées, et Φ et τ dépendent seulement des angles que cette distance forme avec les axes des coordonnées.

Pour l'expression du potentiel vecteur, quand le mouvement électrique se fait dans deux dimensions, on obtient une valeur également simple valable pour des points très éloignés des conducteurs.

Supposons un courant avec l'intensité $\alpha \cos 2\pi n(t - \tau)$ concentré le long d'une ligne S . On a alors cette expression pour le potentiel vecteur en un point arbitraire P :

$$\alpha \int \frac{1}{r} \cos 2\pi n(t - \tau - \frac{r}{a}) dx,$$

ou
$$\cos 2\pi n(t - \tau) \int \frac{1}{r} \cos \pi r dx + \sin 2\pi n(t - \tau) \int \frac{1}{r} \sin \pi r dx,$$

où r est la distance du point P à un point variable R de S , x la distance du point R au point A où S est coupé par un plan passant par P et normal à S ; π est une abbréviation pour $\frac{2\pi n}{a}$. On doit intégrer entre les limites $-\infty$ et $+\infty$.

Si ρ est la distance PA , on peut poser $x = \rho \sinh q$, $r = \rho \cosh q$, et par conséquent $dx = \rho \cosh q dq$. L'expression du potentiel vecteur devient donc

$$2 \cos 2\pi n(t - \tau) \int_0^\infty \cos(\pi \rho \cosh q) dq + 2 \sin 2\pi n(t - \tau) \int_0^\infty \sin(\pi \rho \cosh q) dq.$$

Le coefficient de $2 \cos 2\pi n(t - \tau)$ est la fonction désignée par M. Heine dans son livre *Handbuch der Kugelfunktionen* (2:de éd. t. 1, p. 185) par $K(x\rho)$, et le coefficient de $\sin 2\pi n(t - \tau)$ est $\pi I(x\rho)$ (l. c. p. 187), où I désigne la fonction de Bessel d'ordre zéro. On a donc pour le potentiel vecteur cette expression:

$$2K(x\rho) \cos 2\pi n(t - \tau) + \pi I(x\rho) \sin 2\pi n(t - \tau).$$

Soient maintenant h, k les coordonnées de l'intersection de S avec le plan des yz ; et soient $y = r \cos \Theta$, $z = r \sin \Theta$ les coordonnées d'un point situé à une grande distance du courant.

On a
$$\rho^2 = (r \cos \Theta - h)^2 + (r \sin \Theta - k)^2,$$

d'où
$$\rho = r - (h \cos \Theta + k \sin \Theta) = r - \varepsilon,$$

si nous posons $\varepsilon = h \cos \Theta + k \sin \Theta$ et négligeons les termes contenant r dans le dénominateur. Pour un point éloigné l'expression du potentiel vecteur devient donc

$$2K(x(r - \varepsilon)) \cos 2\pi n(t - \tau) + \pi I(x(r - \varepsilon)) \sin 2\pi n(t - \tau).$$

Mais on sait (Heine, p. 247) que pour des valeurs très grandes de l'argument on a ces expressions approchées pour les fonctions I et K :

$$I(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} (\cos x + \sin x),$$

$$K(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{x}} (\cos x - \sin x).$$

Donc

$$2K(x(r - \varepsilon)) = \sqrt{\frac{\pi}{xr}} [\cos x\varepsilon (\cos x\varepsilon + \sin x\varepsilon) - \sin x\varepsilon (\cos x\varepsilon - \sin x\varepsilon)],$$

$$\pi I(x(r - \varepsilon)) = \sqrt{\frac{\pi}{xr}} [\cos x\varepsilon (\cos x\varepsilon - \sin x\varepsilon) + \sin x\varepsilon (\cos x\varepsilon + \sin x\varepsilon)],$$

et l'expression du potentiel vecteur devient

$$\sqrt{\frac{\pi}{xr}} [\cos 2\pi n(t - \tau - \frac{r}{a}) (\cos x\varepsilon + \sin x\varepsilon) + \sin 2\pi n(t - \tau - \frac{r}{a}) (\cos x\varepsilon - \sin x\varepsilon)],$$

ce qui peut s'écrire

$$\sqrt{\frac{\pi}{xr}} \psi \cos 2\pi n(t - \tau - \frac{r}{a}),$$

où ψ et τ sont indépendants de r , mais contiennent les quantités Θ, h, k, τ .

Donc si l'on a un système de courants variables, parallèles et de la même période, le potentiel vecteur pour des points très éloignés peut s'écrire:

$$\sqrt{\frac{\pi}{\pi r}} \Sigma \psi \cos 2\pi n(t - \tau' - \frac{r}{a}),$$

où la sommation se fait par rapport aux différentes valeurs de h, k, τ' . Mais cette expression peut évidemment s'écrire sous la forme:

$$\sqrt{\frac{\pi}{\pi r}} \Phi \cos 2\pi n(t - \tau - \frac{r}{a}),$$

où Φ et τ sont des fonctions de Θ .

§ 6.

Dans un milieu isolant les forces électriques et magnétiques doivent satisfaire aux équations

$$\begin{aligned} A_\mu \frac{dL}{dt} &= \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}, & A_\varepsilon \frac{dX}{dt} &= \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy}, \\ A_\mu \frac{dM}{dt} &= \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx}, & A_\varepsilon \frac{dY}{dt} &= \frac{dN}{dx} - \frac{dL}{dz}, \\ A_\mu \frac{dN}{dt} &= \frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy}, & A_\varepsilon \frac{dZ}{dt} &= \frac{dL}{dy} - \frac{dM}{dx}, \\ \frac{dL}{dx} + \frac{dM}{dy} + \frac{dN}{dz} &= 0, & \frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} &= 0. \end{aligned}$$

En posant $A^2 \varepsilon \mu = A'^2$, $L\sqrt{\mu} = L'$, $M\sqrt{\mu} = M'$, $N\sqrt{\mu} = N'$, $X\sqrt{\varepsilon} = X'$, $Y\sqrt{\varepsilon} = Y'$, $Z\sqrt{\varepsilon} = Z'$ on peut simplifier les deux premiers systèmes d'équations. Elles deviennent

$$\begin{aligned} A' \frac{dL'}{dt} &= \frac{dZ'}{dy} - \frac{dY'}{dz}, & A' \frac{dX'}{dt} &= \frac{dM'}{dz} - \frac{dN'}{dy}, \\ A' \frac{dM'}{dt} &= \frac{dX'}{dz} - \frac{dZ'}{dx}, & A' \frac{dY'}{dt} &= \frac{dN'}{dx} - \frac{dL'}{dz}, \\ A' \frac{dN'}{dt} &= \frac{dY'}{dx} - \frac{dX'}{dy}, & A' \frac{dZ'}{dt} &= \frac{dL'}{dy} - \frac{dM'}{dx}. \end{aligned}$$

Les deux dernières équations ne sont pas changées par la substitution. Nous emploierons désormais les équations dans la forme simplifiée, mais nous pourrions omettre les accents.

Une solution applicable en beaucoup de cas peut être obtenue en déterminant une fonction auxiliaire Φ qui satisfasse à l'équation

$$A^2 \Phi = A^2 \frac{d^2 \Phi}{dt^2}$$

et en posant ensuite:

$$X = \frac{d^2 \Phi}{dy^2} + \frac{d^2 \Phi}{dz^2}, \quad Y = -\frac{d^2 \Phi}{dx dy}, \quad Z = -\frac{d^2 \Phi}{dx dz},$$

$$L = 0, \quad M = A \frac{d^2 \Phi}{dz dt}, \quad N = -A \frac{d^2 \Phi}{dy dt}.$$

On vérifie aisément que de cette manière les équations pour L, M, N, X, Y, Z sont satisfaites. Pour la détermination complète de Φ il faut aussi avoir égard aux conditions aux limites. Ces conditions sont qu'à la surface d'un conducteur la force électrique y devra être normale et que la force magnétique y sera parallèle. Dans l'infini X, Y, Z, L, M, N devront s'évanouir.

Supposons maintenant qu'on ait un champ traversé par des ondes électriques planes linéairement polarisées. Prenons l'axe des x parallèle à la force électrique, l'axe des y parallèle à la force magnétique et l'axe des z parallèle à la direction de propagation des ondes. On peut alors poser

$$X = \cos 2\pi n (t - Az), \quad Y = Z = 0.$$

De ces expressions on trouve

$$L = 0, \quad M = -\cos 2\pi n (t - Az), \quad N = 0.$$

Nous voulons examiner quels effets sont produits, si l'on introduit dans le champ un système de cylindres conducteurs de longueur infinie ayant leurs axes dans la direction de propagation des ondes. Cherchons à exprimer les forces exercées par les cylindres à l'aide d'une fonction auxiliaire, de la manière indiquée tout à l'heure, et prenons cette fonction de la forme

$$\Phi = \psi(x, y) \sin 2\pi n (t - Az).$$

Parce que Φ doit satisfaire à l'équation

$$\Delta^2 \Phi = A^2 \frac{d^2 \Phi}{dt^2}$$

il faut que

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{d^2 \psi}{dy^2} = 0.$$

On peut donc prendre pour ψ la partie réelle d'une fonction quelconque de la quantité $x + y \sqrt{-1}$. Il faut déterminer la fonction ψ de telle sorte que la force électrique devienne normale à la surface des conducteurs, que la force magnétique y devienne parallèle et que dans l'infini les forces s'évanouissent. Enfin l'introduction des cylindres ne doit pas changer l'énergie totale du champ.

Les expressions des forces exercées par le système de cylindres sont, d'après les formules du commencement de ce paragraphe (nous changeons les coordonnées)

$$X' = - \frac{d^2 \Phi}{dx dz} = \kappa \frac{d\psi}{dx} \cos 2\pi n (t - Az),$$

$$Y' = - \frac{d^2 \Phi}{dy dz} = \kappa \frac{d\psi}{dy} \cos 2\pi n (t - Az),$$

$$Z' = \frac{d^2 \Phi}{dx^2} + \frac{d^2 \Phi}{dy^2} = 0,$$

$$L' = A \frac{d^2 \Phi}{dy dt} = \kappa \frac{d\psi}{dy} \cos 2\pi n (t - Az),$$

$$M' = - A \frac{d^2 \Phi}{dx dt} = - \kappa \frac{d\psi}{dx} \cos 2\pi n (t - Az),$$

$$N' = 0,$$

où, pour abréger, nous avons posé $2\pi n A = \kappa$.

Pour que la force électrique soit normale à la surface des conducteurs il faut avoir

$$\frac{X + X'}{l} = \frac{Y + Y'}{m}$$

à chaque point de la surface d'un conducteur; l et m sont les cosinus des angles que la normale extérieure de la surface fait avec les axes des x et des y . Pour que la force magnétique soit parallèle à la surface il faut avoir

$$(L + L')l + (M + M')m = 0.$$

Avec les valeurs données ci-dessus pour les forces, les deux conditions sont identiques. Elles peuvent être exprimées par cette équation:

$$1 + \kappa \frac{d\psi}{dx} = \kappa \frac{d\psi}{dy} \frac{l}{m}$$

ou

$$\kappa \frac{d\psi}{ds} = m,$$

si ds désigne l'élément du contour de la section du cylindre avec le plan des xy . Cette condition est satisfaite si on pose pour l'intérieur de chaque cylindre $\kappa\psi = -x +$ une constante, et si l'on détermine ensuite ψ de telle sorte qu'il reste continu à la surface du cylindre. La constante peut varier avec les différents cylindres. Cette condition, jointe à celle que les forces doivent être nulles

dans l'infini, suffit pour déterminer ψ . Avant de passer à des exemples, nous démontrerons que, si les forces sont déterminées de cette manière, la valeur de l'énergie totale du champ n'est pas changée.

Nous avons donc à démontrer que

$$\int [X^2 - (X + X')^2 + Y^2 - (Y + Y')^2 + L^2 - (L + L')^2 + M^2 - (M + M')^2] d\omega \\ + \int [X^2 + Y^2 + L^2 + M^2] d\omega' = 0,$$

où la première intégrale est étendue sur toute la partie du plan des xy extérieure aux cylindres, et la seconde sur toutes les parties encloses par les cylindres. $d\omega$ et $d\omega'$ désignent les éléments de ces surfaces. Avec les valeurs données des forces, l'équation à démontrer peut s'écrire:

$$\int \left\{ 1 - \left(1 + \kappa \frac{d\psi}{dx} \right)^2 - \kappa^2 \left(\frac{d\psi}{dy} \right)^2 \right\} d\omega + \int d\omega' = 0$$

ou

$$2\kappa \int \frac{d\psi}{dx} d\omega + \kappa^2 \int \left\{ \left(\frac{d\psi}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dy} \right)^2 \right\} d\omega = \Omega,$$

si Ω est la somme des aires des parties du plan des xy encloses par les cylindres.

On a
$$\int \frac{d\psi}{dx} d\omega = - \int \psi dy,$$

cette dernière intégrale étant prise le long des contours de toutes les aires mentionnées. Si ψ' est une fonction de x et y telle que $\psi + \psi' \sqrt{-1}$ est une fonction de $x + y \sqrt{-1}$, on sait que

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{d\psi'}{dy}, \quad \frac{d\psi}{dy} = - \frac{d\psi'}{dx}$$

et par conséquent

$$\left(\frac{d\psi}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dy} \right)^2 = \left(\frac{d\psi'}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\psi'}{dy} \right)^2.$$

Donc

$$\int \left\{ \left(\frac{d\psi}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dy} \right)^2 \right\} d\omega = \int \left\{ \left(\frac{d\psi'}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\psi'}{dy} \right)^2 \right\} d\omega = \int \psi' \left(\frac{d\psi'}{dy} dx - \frac{d\psi'}{dx} dy \right) =$$

(la dernière intégrale étant prise le long des contours des sections des cylindres)

$$= \int \psi' \frac{d\psi'}{ds} ds = \frac{1}{\kappa} \int \psi' m ds = - \frac{1}{\kappa} \int \psi' dx.$$

Nous avons donc à démontrer que

$$\Omega = - 2\kappa \int \psi dy - \kappa \int \psi' dx.$$

On sait que $\int(\psi dy + \psi' dx) = 0$
 et parce que $-\kappa\psi = x + \text{constante}$
 on a $\Omega = -\int \kappa\psi dy$.

L'égalité est donc démontrée.

Prenons maintenant d'abord l'exemple d'un cylindre circulaire. Soit c son rayon. Supposons l'origine des coordonnées située sur l'axe du cylindre.

Alors pour $x^2 + y^2 = c^2$ on doit avoir

$$y = \kappa \left(x \frac{d\psi}{dy} - y \frac{d\psi}{dx} \right),$$

ou, si l'on introduit des coordonnées polaires, $x = r \cos \Theta$, $y = r \sin \Theta$,

$$c \sin \Theta = \kappa \frac{d\psi}{d\Theta}.$$

L'équation $\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{d^2\psi}{dy^2} = 0$ est satisfaite si l'on prend pour ψ une fonction de la forme

$$\psi = r^m (C \cos m\Theta + C' \sin m\Theta).$$

Comme les dérivées s'évanouiront dans l'infini, il faut que $m < 1$. La condition pour la surface du cylindre montre que

$$m = -1, \quad C = -\frac{c^2}{\kappa}, \quad C' = 0.$$

Donc

$$\Phi = -\frac{c^2}{\kappa} \cdot \frac{\cos \Theta}{r} \cdot \cos 2\pi n (t - Az) = -\frac{c^2}{\kappa} \cdot \frac{x}{x^2 + y^2} \cdot \cos 2\pi n (t - Az).$$

Les expressions des forces exercées par le cylindre deviennent

$$X' = c^2 \cdot \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \cdot \cos 2\pi n (t - Az) = \frac{c^2}{r^2} \cos 2\Theta \cos 2\pi n (t - Az),$$

$$Y' = c^2 \cdot \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \cdot \cos 2\pi n (t - Az) = \frac{c^2}{r^2} \sin 2\Theta \cos 2\pi n (t - Az),$$

$$L' = \frac{c^2}{r^2} \sin 2\Theta \cos 2\pi n (t - Az),$$

$$M' = -\frac{c^2}{r^2} \cos 2\Theta \cos 2\pi n (t - Az).$$

La grandeur des forces est donc proportionnelle au carré du rayon du cylindre et inversement proportionnelle au carré de la distance de l'axe du cylindre.

La force électrique totale en un point de la surface du cylindre est $(X + X') \cos \Theta + Y' \sin \Theta$, ou

$$2 \cos \Theta \cos 2\pi n (t - Az),$$

la force magnétique est $L' \sin \Theta - (M + M') \cos \Theta$, ce qui donne la même expression.

On peut donc s'imaginer des courants coulant le long des génératrices du cylindre avec une intensité proportionnelle à l'expression $\cos \Theta \cos 2\pi n (t - Az)$. Ces courants sont accompagnés de charges d'électricité statique, dont la densité est proportionnelle à la même expression.

On voit donc qu'à la surface du cylindre les forces électrique et magnétique sont en maximum doublées. Cela arrive le long de deux génératrices opposées du cylindre. Aux génératrices qui sont à distance égale des premières la force électrique et magnétique est nulle.

Supposons maintenant deux cylindres égaux placés dans la direction de propagation des ondes. Leur rayon est c , nous supposons l'origine des coordonnées située dans le plan passant par les axes des cylindres et à des distances égales de ces axes. Pour ce cas introduisons au lieu de x et y des coordonnées nouvelles ξ et η liées aux premières par la relation

$$\xi + \eta \sqrt{-1} = \operatorname{arctg} \frac{x + y \sqrt{-1}}{l},$$

d'où l'on déduit

$$x^2 + y^2 + 2xl \cot 2\xi - l^2 = 0,$$

$$x^2 + y^2 - 2yl \coth 2\eta + l^2 = 0,$$

$$x = \frac{l \sin 2\xi}{\cos 2\xi + \cosh 2\eta},$$

$$y = \frac{l \sinh 2\eta}{\cos 2\xi + \cosh 2\eta}.$$

Les lignes $\xi = \text{constante}$ sont des cercles coupant l'axe des y dans les points $x = 0$, $y = \pm l$, ayant pour centre $x = -l \cot 2\xi$, $y = 0$, et pour rayon $\frac{l}{\sin 2\xi}$. $\xi = 0$ représente la partie de l'axe des y située entre les points $y = \pm l$;

$\xi = \frac{\pi}{2}$ l'autre partie de l'axe des y . Les lignes $\eta = \text{constante}$ sont des cercles coupant ceux du premier système orthogonalement, avec le centre $x = 0$,

$y = l \coth 2\eta$, et le rayon $\frac{l}{\sinh 2\eta}$. Ces cercles ne se coupent pas. On peut supposer que les intersections des deux cylindres avec le plan des xy soient $\eta = \alpha$ et $\eta = -\alpha$.

ψ doit maintenant être la partie réelle d'une fonction de $\xi + \eta i$ ($i = \sqrt{-1}$), et pour $\eta = \alpha$ et $\eta = -\alpha$, ψ doit devenir, à une constante près, égal à $-\frac{x}{\alpha}$ ou à $-\frac{y}{\alpha}$, selon la direction de la force électrique. (Cfr pour ce qui suit Basset, *Treatise on Hydrodynamics*, vol. 1, p. 112.)

$$\text{On a } \frac{x+yi}{l} = \operatorname{tg}(\xi + i\eta) = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{i\xi-\eta} - e^{-i\xi+\eta}}{e^{i\xi-\eta} + e^{-i\xi+\eta}}.$$

Cette expression peut, si η est positif, être développée en:

$$i + 2i \sum_1^{\infty} (-1)^n e^{-2n\eta} (\cos 2n\xi + i \sin 2n\xi),$$

et, si η est négatif, en

$$-i - 2i \sum_1^{\infty} (-1)^n e^{2n\eta} (\cos 2n\xi - i \sin 2n\xi).$$

On a donc, pour η positif,

$$x = -2l \sum_1^{\infty} (-1)^n e^{-2n\eta} \sin 2n\xi,$$

$$y = l + 2l \sum_1^{\infty} (-1)^n e^{-2n\eta} \cos 2n\xi,$$

et, pour η négatif,

$$x = -2l \sum_1^{\infty} (-1)^n e^{2n\eta} \sin 2n\xi,$$

$$y = -l - 2l \sum_1^{\infty} (-1)^n e^{2n\eta} \cos 2n\xi.$$

Maintenant, si la force électrique est dirigée suivant le plan joignant les axes des cylindres, c'est-à-dire suivant l'axe des y , on doit avoir, pour $\eta = \alpha$ et $\eta = -\alpha$, ψ égal à $-\frac{y}{\alpha}$, à une constante près. Posons donc

$$\psi = \sum_1^{\infty} [A_n \sinh 2n(\eta + \alpha) + B_n \sinh 2n(\eta - \alpha)] \cos 2n\xi + F,$$

où A_n et B_n sont des constantes à déterminer, et F une fonction de η . On trouve

$$A_n \sinh 4n\alpha = -\frac{2l}{z} \cdot (-1)^n e^{-2n\alpha},$$

$$B_n \sinh 4n\alpha = -\frac{2l}{z} \cdot (-1)^n e^{-2n\alpha}.$$

Donc

$$\psi = -\frac{2l}{z} \sum_1^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{e^{-2n\alpha}}{\sinh 2n\alpha} \cos 2n\xi \sinh 2n\eta + F.$$

F doit être déterminé par la condition que $\psi = 0$ dans l'infini, c'est-à-dire pour $2\xi = \pi$ et $\eta = 0$. On voit donc que $F = 0$.

Les composantes de la force électrique le long des axes des coordonnées sont dans ce cas

$$-z \frac{d\psi}{dx} \cos 2\pi n (t - Az),$$

$$(1 + z \frac{d\psi}{dy}) \cos 2\pi n (t - Az).$$

Des relations entre x , y et ξ , η on obtient

$$2ld\xi = (1 + \cos 2\xi \cosh 2\eta) dx + \sin 2\xi \sinh 2\eta dy,$$

$$2ld\eta = -\sin 2\xi \sinh 2\eta dx + (1 + \cos 2\xi \cosh 2\eta) dy.$$

Donc

$$\begin{aligned} -z \frac{d\psi}{dx} &= -\sum_1^{\infty} (-1)^n \cdot 2n \cdot \frac{e^{-2n\alpha}}{\sinh 2n\alpha} \{ \sin 2n\xi \sinh 2n\eta (1 + \cos 2\xi \cosh 2\eta) + \\ &\quad \cos 2n\xi \cosh 2n\eta \sin 2\xi \sinh 2\eta \} \\ &= -\sum_1^{\infty} (-1)^n \cdot n \cdot \frac{e^{-2n\alpha}}{\sinh 2n\alpha} \{ 2 \sin 2n\xi \sinh 2n\eta + \sin 2(n+1)\xi \sinh 2(n+1)\eta + \\ &\quad \sin 2(n-1)\xi \sinh 2(n-1)\eta \}; \\ 1 + z \frac{d\psi}{dy} &= 1 - \sum_1^{\infty} (-1)^n \cdot 2n \cdot \frac{e^{-2n\alpha}}{\sinh 2n\alpha} \cdot \{ -\sin 2n\xi \sinh 2n\eta \sin 2\xi \sinh 2\eta + \\ &\quad \cos 2n\xi \cosh 2n\eta (1 + \cos 2\xi \cosh 2\eta) \} \\ &= 1 - \sum_1^{\infty} (-1)^n \cdot n \cdot \frac{e^{-2n\alpha}}{\sinh 2n\alpha} \{ 2 \cos 2n\xi \cosh 2n\eta + \cos 2(n+1)\xi \cosh 2(n+1)\eta + \\ &\quad \cos 2(n-1)\xi \cosh 2(n-1)\eta \}. \end{aligned}$$

Pour le plan joignant les axes des cylindres, pour lequel $\xi = 0$, $z \frac{d\psi}{dx}$ est égal à zéro, et on a

$$1 + z \frac{d\psi}{dy} = 1 - 4 \cosh^2 \eta \sum_1^{\infty} (-1)^n \cdot n \cdot \frac{e^{-2n\alpha}}{\sinh 2n\alpha} \cosh 2n\eta.$$

Pour $\eta = \alpha$, c'est-à-dire pour le voisinage d'un des cylindres, cette expression se réduit à (je rappelle qu'on a $c = \frac{l}{\sinh 2\alpha}$):

$$1 + \kappa \frac{d\psi}{dy} = 2 + \frac{c^2}{2l^2} + \dots$$

Voilà le rapport entre la force électrique du champ dans le point considéré et la force électrique qu'on aurait eue en ce point sans les conducteurs.

Pour $\eta = 0$, c'est-à-dire au milieu des deux cylindres, on a:

$$1 + \kappa \frac{d\psi}{dy} = 1 + \frac{2c^2}{l^2} + \dots$$

Supposons maintenant la force électrique dirigée perpendiculairement au plan passant par les axes des cylindres, c'est-à-dire suivant l'axe des x . Alors, pour $\eta = \alpha$ et $\eta = -\alpha$, ψ doit être égal à $-\frac{x}{\kappa}$ à une constante près. De là on obtient

$$\psi = \frac{2l}{\kappa} \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{e^{-2n\alpha}}{\cosh 2n\alpha} \sin 2n\xi \cosh 2n\eta.$$

Les composantes de la force électrique sont dans ce cas

$$(1 + \kappa \frac{d\psi}{dx}) \cos 2\pi n (t - Az),$$

$$\kappa \frac{d\psi}{dy} \cos 2\pi n (t - Az).$$

On obtient:

$$1 + \kappa \frac{d\psi}{dx} = 1 + \sum_1^{\infty} (-1)^n \cdot n \frac{e^{-2n\alpha}}{\cosh 2n\alpha} \{2 \cos 2n\xi \cosh 2n\eta + \cos 2(n+1)\xi \cosh 2(n+1)\eta + \cos 2(n-1)\xi \cosh 2(n-1)\eta\}.$$

$$\kappa \frac{d\psi}{dy} = \sum_1^{\infty} (-1)^n \cdot n \frac{e^{-2n\alpha}}{\cosh 2n\alpha} \{2 \sin 2n\xi \sinh 2n\eta + \sin 2(n+1)\xi \sinh 2(n+1)\eta + \sin 2(n-1)\xi \sinh 2(n-1)\eta\}.$$

Dans le plan passant par les axes des cylindres ($\xi = 0$) on a $\kappa \frac{d\psi}{dy} = 0$ et

$$1 + \kappa \frac{d\psi}{dx} = 1 + 4 \cosh^2 \eta \sum_1^{\infty} (-1)^n n \frac{e^{-2n\alpha}}{\cosh 2n\alpha} \cosh 2n\eta.$$

Dans les expériences où l'on a cherché à mesurer la longueur des ondes électriques, les expérimentateurs ont pour la plupart augmenté l'intensité des

forces à l'aide de fils métalliques tendus dans la direction de propagation des ondes. On voit par ce qui précède que, si les ondes étaient planes et les fils de longueur infinie, on pourrait augmenter l'intensité du champ au double seulement, et ceci n'aurait lieu que dans le voisinage immédiat des fils. Mais dans les expériences les fils n'ont pas de longueur considérable; de plus les expériences ont été faites dans le voisinage de l'excitateur, où les ondes sont loin d'être planes. On ne peut donc pas employer les formules précédentes.

Il est intéressant d'examiner le changement dans la distribution de l'énergie, causé par l'introduction du conducteur. Nous nous bornerons au cas où l'on n'a qu'un cylindre. Dans l'état non troublé l'énergie d'un élément de volume $d\tau$ est

$$\frac{1}{8\pi} (X^2 + M^2) d\tau \text{ ou } \frac{1}{4\pi} \cos^2 2\pi n (t - Az) d\tau.$$

Dans l'état troublé elle est

$$\frac{1}{8\pi} \{(X + X')^2 + Y'^2 + (M + M')^2 + L'^2\} d\tau$$

ou

$$\frac{1}{4\pi} \left(1 + \frac{2c^2}{r^2} \cos 2\Theta + \frac{c^4}{r^4}\right) \cos^2 2\pi n (t - Az) d\tau.$$

Donc dans tous les points de la surface cylindrique

$$\frac{2c^2}{r^2} \cos 2\Theta + \frac{c^4}{r^4} = 0 \text{ ou } y^2 - x^2 = \frac{c^2}{2},$$

l'énergie n'est pas changée. Si l'on pose

$$\frac{2c^2}{r^2} \cos 2\Theta + \frac{c^4}{r^4} = \alpha \frac{c^2}{r^2},$$

on obtient

$$(\alpha - 2)x^2 + (\alpha + 2)y^2 = c^2;$$

l'équation d'une famille de surfaces sur chacune desquelles l'augmentation ou la diminution de l'énergie est en raison inverse du carré de la distance de l'axe du cylindre. Ces surfaces sont des cylindres hyperboliques ou elliptiques. Pour $\alpha = 2$, la surface dégénère en deux plans parallèles.

§ 7.

Nous examinerons maintenant les effets produits en introduisant dans un champ traversé par des ondes électriques un cylindre conducteur dans la direction de la force électrique.

Nous prendrons l'origine sur l'axe du cylindre. L'axe des x est parallèle à la force électrique; l'axe des y à la force magnétique, et l'axe des z à la direction de propagation des ondes. Nous supposons comme auparavant

$$\begin{aligned} X &= \cos 2\pi n (t - Az), \quad Y = 0, \quad Z = 0, \\ L &= 0, \quad M = -\cos 2\pi n (t - Az), \quad N = 0. \end{aligned}$$

Dans le cylindre se produisent cette fois des courants parallèles à son axe. Nous désignerons leur potentiel vecteur, qui est parallèle à l'axe des x , par

$$F = F' \cos 2\pi nt + F'' \sin 2\pi nt.$$

F' et F'' ne dépendent que de y et z . On devra avoir

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{d^2 F'}{dy^2} + \frac{d^2 F'}{dz^2} + \kappa^2 F' = 0, \\ \frac{d^2 F''}{dy^2} + \frac{d^2 F''}{dz^2} + \kappa^2 F'' = 0, \end{cases}$$

si nous posons $\kappa = 2\pi nA$.

Pour les forces électriques et magnétiques exercées par ces courants on a

$$X' = -\frac{dF}{dt} = -2\pi n (F'' \cos 2\pi nt - F' \sin 2\pi nt),$$

$$Y' = Z' = L' = 0,$$

$$AM' = -\frac{dF}{dz} = -\left(\frac{dF'}{dz} \cos 2\pi nt + \frac{dF''}{dz} \sin 2\pi nt\right),$$

$$AN' = \frac{dF}{dy} = \frac{dF'}{dy} \cos 2\pi nt + \frac{dF''}{dy} \sin 2\pi nt.$$

La force électrique totale doit être nulle à la surface du cylindre, donc

$$2\pi n (F'' \cos 2\pi nt - F' \sin 2\pi nt) = \cos 2\pi n (t - Az),$$

ou

$$(2) \quad 2\pi n F'' = \cos \kappa z, \quad 2\pi n F' = -\sin \kappa z$$

pour $y^2 + z^2 = c^2$ (c le rayon du cylindre).

Si l'on introduit des coordonnées polaires, $y = r \cos \Theta$, $z = r \sin \Theta$, l'équation différentielle (1) peut s'écrire

$$(1') \quad \frac{d^2 F''}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF''}{dr} + \frac{1}{r^2} \frac{d^2 F''}{d\Theta^2} + \kappa^2 F'' = 0$$

et les équations (2)

$$(2') \quad 2\pi n F''' = \cos(\kappa c \sin \Theta), \quad 2\pi n F' = -\sin(\kappa c \sin \Theta), \quad \text{pour } r = c.$$

Pour que la force magnétique soit parallèle à la surface, il faut avoir pour $y^2 + z^2 = c^2$

$$y(M + M') + zN' = 0$$

ou

$$y \left(A \cos \kappa z + \frac{dF''}{dz} \right) = z \frac{dF''}{dy},$$

$$y \left(A \sin \kappa z + \frac{dF'''}{dz} \right) = z \frac{dF'''}{dy},$$

ou enfin, en employant des coordonnées polaires,

$$\frac{dF''}{d\Theta} = -Ac \cos \Theta \cos(\kappa c \sin \Theta),$$

$$\frac{dF'''}{d\Theta} = -Ac \cos \Theta \sin(\kappa c \sin \Theta),$$

pour $r = c$. On voit que ces équations sont obtenues en différentiant les équations (2') par rapport à Θ . Nous n'avons donc pas à nous occuper séparément de la condition superficielle pour la force magnétique.

Supposons maintenant la fonction F' de la forme

$$\Sigma U_s \cos s\Theta + \Sigma V_s \sin s\Theta$$

et F'' de la forme

$$\Sigma U'_s \cos s\Theta + \Sigma V'_s \sin s\Theta.$$

Les fonctions U_s, V_s, U'_s, V'_s doivent alors satisfaire à cette équation différentielle

$$\frac{d^2 U_s}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU_s}{dr} + \left(\kappa^2 - \frac{s^2}{r^2} \right) U_s = 0.$$

L'intégrale générale de cette équation peut s'écrire (Heine, t. I, pp. 236, 237)

$$\alpha_s I_s(\kappa r) + \beta_s K_s(\kappa r),$$

où I_s désigne la fonction de Bessel d'ordre s , et K_s une fonction qu'on peut déduire des fonctions de Bessel (l. c. pp. 237, 245).

On doit avoir pour $r = c$

$$2\pi n \Sigma U_s \cos s\Theta + 2\pi n \Sigma V_s \sin s\Theta = -\sin(\kappa c \sin \Theta) \text{ et}$$

$$2\pi n \Sigma U'_s \cos s\Theta + 2\pi n \Sigma V'_s \sin s\Theta = \cos(\kappa c \sin \Theta).$$

Mais on a (Heine, p. 82; Todhunter, *Laplace's functions*, p. 319)

$$\sin(\kappa c \sin \Theta) = 2 \sum_0^{\infty} I_{2s+1}(\kappa c) \sin(2s+1)\Theta,$$

$$\cos(\kappa c \sin \Theta) = I_0(\kappa c) + 2 \sum_1^{\infty} I_{2s}(\kappa c) \cos 2s\Theta.$$

Donc, si l'on pose

$$U_s = \alpha_s I_s(\kappa r) + \beta_s K_s(\kappa r),$$

$$V_s = \gamma_s I_s(\kappa r) + \delta_s K_s(\kappa r),$$

$$U'_s = \alpha'_s I_s(\kappa r) + \beta'_s K_s(\kappa r),$$

$$V'_s = \gamma'_s I_s(\kappa r) + \delta'_s K_s(\kappa r),$$

on obtient pour les coefficients α , β , γ , δ , α' , β' , γ' , δ' ces équations:

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} \alpha_s I_s(\kappa c) + \beta_s K_s(\kappa c) = 0, \\ \gamma_{2s} I_{2s}(\kappa c) + \delta_{2s} K_{2s}(\kappa c) = 0, \\ \gamma_{2s+1} I_{2s+1}(\kappa c) + \delta_{2s+1} K_{2s+1}(\kappa c) = -\frac{1}{\pi n} I_{2s+1}(\kappa c), \\ \alpha'_0 I_0(\kappa c) + \beta'_0 K_0(\kappa c) = \frac{1}{2\pi n} I_0(\kappa c), \\ \alpha'_{2s} I_{2s}(\kappa c) + \beta'_{2s} K_{2s}(\kappa c) = \frac{1}{\pi n} I_{2s}(\kappa c), \quad (s > 0) \\ \alpha'_{2s+1} I_{2s+1}(\kappa c) + \beta'_{2s+1} K_{2s+1}(\kappa c) = 0, \\ \gamma'_s I_s(\kappa c) + \delta'_s K_s(\kappa c) = 0. \end{array} \right.$$

Afin d'obtenir de nouvelles équations pour déterminer les coefficients, nous considérerons l'expression du potentiel vecteur pour des points très éloignés. On voit par la p. 23 ci-dessus que pour de tels points l'expression de F doit se réduire à

$$V \sqrt{\frac{\pi}{\kappa r}} \Phi \cos 2\pi n(t - \tau - Ar),$$

où Φ et τ sont indépendants de r et ne dépendent que de Θ . Mais on sait que pour de grandes valeurs de x , les fonctions I_s et K_s sont de la forme (Heine, p. 247):

$$I_{2s}(x) = \frac{(-1)^s}{\sqrt{\pi x}} (\cos x + \sin x),$$

$$I_{2s+1}(x) = \frac{(-1)^{s+1}}{\sqrt{\pi x}} (\cos x - \sin x),$$

$$K_{2s}(x) = \frac{(-1)^s}{2} \sqrt{\frac{\pi}{x}} (\cos x + \sin x),$$

$$K_{2s+1}(x) = \frac{(-1)^s}{2} \sqrt{\frac{\pi}{x}} (\cos x + \sin x).$$

Pour de grandes valeurs de r , l'expression de F prend donc la forme:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{\pi \kappa r}} \cos 2\pi n t \sum_0^{\infty} (-1)^s [\alpha_{2s} (\cos \kappa r + \sin \kappa r) + \frac{\pi}{2} \beta_{2s} (\cos \kappa r - \sin \kappa r)] \cos 2s\Theta + \\ & + \frac{1}{\sqrt{\pi \kappa r}} \cos 2\pi n t \sum_0^{\infty} (-1)^s [-\alpha_{2s+1} (\cos \kappa r - \sin \kappa r) + \frac{\pi}{2} \beta_{2s+1} (\cos \kappa r + \sin \kappa r)] \cos(2s+1)\Theta + \\ & + \frac{1}{\sqrt{\pi \kappa r}} \cos 2\pi n t \sum_0^{\infty} (-1)^s [\gamma_{2s} (\cos \kappa r + \sin \kappa r) + \frac{\pi}{2} \delta_{2s} (\cos \kappa r - \sin \kappa r)] \sin 2s\Theta + \\ & + \frac{1}{\sqrt{\pi \kappa r}} \cos 2\pi n t \sum_0^{\infty} (-1)^s [-\gamma_{2s+1} (\cos \kappa r - \sin \kappa r) + \frac{\pi}{2} \delta_{2s+1} (\cos \kappa r + \sin \kappa r)] \sin(2s+1)\Theta + \\ & + \frac{1}{\sqrt{\pi \kappa r}} \sin 2\pi n t \sum_0^{\infty} (-1)^s [\alpha'_{2s} (\cos \kappa r + \sin \kappa r) + \frac{\pi}{2} \beta'_{2s} (\cos \kappa r - \sin \kappa r)] \cos 2s\Theta + \\ & + \frac{1}{\sqrt{\pi \kappa r}} \sin 2\pi n t \sum_0^{\infty} (-1)^s [-\alpha'_{2s+1} (\cos \kappa r - \sin \kappa r) + \frac{\pi}{2} \beta'_{2s+1} (\cos \kappa r + \sin \kappa r)] \cos(2s+1)\Theta + \\ & + \frac{1}{\sqrt{\pi \kappa r}} \sin 2\pi n t \sum_0^{\infty} (-1)^s [\gamma'_{2s} (\cos \kappa r + \sin \kappa r) + \frac{\pi}{2} \delta'_{2s} (\cos \kappa r - \sin \kappa r)] \sin 2s\Theta + \\ & + \frac{1}{\sqrt{\pi \kappa r}} \sin 2\pi n t \sum_0^{\infty} (-1)^s [-\gamma'_{2s+1} (\cos \kappa r - \sin \kappa r) + \frac{\pi}{2} \delta'_{2s+1} (\cos \kappa r + \sin \kappa r)] \sin(2s+1)\Theta. \end{aligned}$$

Pour que cette expression soit de la forme mentionnée ci-dessus, il faut que le coefficient de $\cos \kappa r \cos 2\pi n t$ soit le même que celui de $\sin \kappa r \sin 2\pi n t$, et le coefficient de $\cos \kappa r \sin 2\pi n t$ le même que celui de $(-\sin \kappa r \cos 2\pi n t)$. On obtient ainsi deux équations; mais dans chacune les termes des deux membres contenant le sinus ou le cosinus du même multiple de Θ doivent être égaux. On trouve ainsi ces équations:

$$(4) \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{2n} + \frac{\pi}{2} \beta_{2n} = \alpha'_{2n} - \frac{\pi}{2} \beta'_{2n}, \\ \gamma_{2n} + \frac{\pi}{2} \delta_{2n} = \gamma'_{2n} - \frac{\pi}{2} \delta'_{2n}, \\ -\alpha_{2n+1} + \frac{\pi}{2} \beta_{2n+1} = \alpha'_{2n+1} + \frac{\pi}{2} \beta'_{2n+1}, \\ -\gamma_{2n+1} + \frac{\pi}{2} \delta_{2n+1} = \gamma'_{2n+1} + \frac{\pi}{2} \delta'_{2n+1}, \\ -\alpha_{2n} + \frac{\pi}{2} \beta_{2n} = \alpha'_{2n} + \frac{\pi}{2} \beta'_{2n}, \\ -\gamma_{2n} + \frac{\pi}{2} \delta_{2n} = \gamma'_{2n} + \frac{\pi}{2} \delta'_{2n}, \\ \alpha_{2n+1} + \frac{\pi}{2} \beta_{2n+1} = \alpha'_{2n+1} - \frac{\pi}{2} \beta'_{2n+1}, \\ \gamma_{2n+1} + \frac{\pi}{2} \delta_{2n+1} = \gamma'_{2n+1} - \frac{\pi}{2} \delta'_{2n+1}. \end{array} \right.$$

On en déduit:

$$\alpha'_s = \frac{\pi}{2} \beta_s, \quad \beta'_s = -\frac{2}{\pi} \alpha_s, \quad \gamma'_s = \frac{\pi}{2} \delta_s, \quad \delta'_s = -\frac{2}{\pi} \gamma_s.$$

Les équations (3) donnent maintenant:

$$\begin{aligned} \alpha_{2s+1} &= \beta_{2s+1} = \gamma_{2s} = \delta_{2s} = 0. \\ \alpha_0 &= -\frac{1}{n} \cdot \frac{K_0(\kappa c) \cdot I_0(\kappa c)}{\pi^2 [I_0(\kappa c)]^2 + 4[K_0(\kappa c)]^2}, \\ \beta_0 &= \frac{1}{n} \cdot \frac{[I_0(\kappa c)]^2}{\pi^2 [I_0(\kappa c)]^2 + 4[K_0(\kappa c)]^2}, \\ \alpha_{2s} &= -\frac{2}{n} \cdot \frac{I_{2s}(\kappa c) K_{2s}(\kappa c)}{\pi^2 [I_{2s}(\kappa c)]^2 + 4[K_{2s}(\kappa c)]^2}, \\ \beta_{2s} &= \frac{2}{n} \cdot \frac{[I_{2s}(\kappa c)]^2}{\pi^2 [I_{2s}(\kappa c)]^2 + 4[K_{2s}(\kappa c)]^2}, \\ \gamma_{2s+1} &= -\frac{\pi}{n} \cdot \frac{[I_{2s+1}(\kappa c)]^2}{\pi^2 [I_{2s+1}(\kappa c)]^2 + 4[K_{2s+1}(\kappa c)]^2}, \\ \delta_{2s+1} &= -\frac{4}{\pi n} \cdot \frac{I_{2s+1}(\kappa c) \cdot K_{2s+1}(\kappa c)}{\pi^2 [I_{2s+1}(\kappa c)]^2 + 4[K_{2s+1}(\kappa c)]^2}. \end{aligned}$$

Si désormais nous omettons l'argument κc , nous avons:

$$\begin{aligned} U_0 &= -\frac{1}{n} \cdot \frac{I_0}{\pi^2 I_0^2 + 4K_0^2} (K_0 I_0(\kappa r) - I_0 K_0(\kappa r)), \\ U_{2s} &= -\frac{2}{n} \cdot \frac{I_{2s}}{\pi^2 I_{2s}^2 + 4K_{2s}^2} (K_{2s} I_{2s}(\kappa r) - I_{2s} K_{2s}(\kappa r)), \\ V_{2s+1} &= -\frac{1}{\pi n} \cdot \frac{I_{2s+1}}{\pi^2 I_{2s+1}^2 + 4K_{2s+1}^2} (\pi^2 I_{2s+1} I_{2s+1}(\kappa r) + 4K_{2s+1} K_{2s+1}(\kappa r)), \\ U'_0 &= \frac{1}{2\pi n} \cdot \frac{I_0}{\pi^2 I_0^2 + 4K_0^2} (\pi^2 I_0 I_0(\kappa r) + 4K_0 K_0(\kappa r)), \\ U'_{2s} &= \frac{1}{\pi n} \cdot \frac{I_{2s}}{\pi^2 I_{2s}^2 + 4K_{2s}^2} (\pi^2 I_{2s} I_{2s}(\kappa r) + K_{2s} K_{2s}(\kappa r)), \\ V'_{2s+1} &= -\frac{2}{n} \cdot \frac{I_{2s+1}}{\pi^2 I_{2s+1}^2 + 4K_{2s+1}^2} (K_{2s+1} I_{2s+1}(\kappa r) - I_{2s+1} K_{2s+1}(\kappa r)). \end{aligned}$$

Les autres U_s et V_s s'évanouissent.

On peut maintenant écrire les expressions des forces électriques et magnétiques. Je ne le ferai que pour un cas spécial, celui où le rayon du cylindre est très petit en comparaison de la longueur d'onde.

I_0 est fini pour $x=0$, mais tous les autres I_s s'évanouissent pour $x=0$, et pour de petites valeurs de x I_s est un infiniment petit d'ordre s . Tous les K_s sont infinis pour $x=0$; K_0 est infini comme $\log x$, mais les autres K_s comme x^{-s} . On voit donc que, si c est très petit, on peut négliger dans F tous les termes excepté ceux qui contiennent U_0 et U'_0 . On a donc

$$F = \frac{1}{2\pi n} \cdot \frac{I_0}{\pi^2 I_0^2 + 4K_0^2} [\sin 2\pi n t (\pi^2 I_0 I_0(\kappa r) + 4K_0 K_0(\kappa r)) - 2\pi \cos 2\pi n t (K_0 I_0(\kappa r) - I_0 K_0(\kappa r))],$$

ou, si l'on néglige dans la parenthèse les termes ayant pour coefficient I_0 ,

$$F = \frac{1}{\pi n} \cdot \frac{I_0 K_0}{\pi^2 I_0^2 + 4K_0^2} (2K_0(\kappa r) \sin 2\pi n t - \pi I_0(\kappa r) \cos 2\pi n t).$$

C'est là le potentiel vecteur d'un courant de l'intensité $\frac{1}{\pi n} \cdot \frac{I_0 K_0}{\pi^2 I_0^2 + 4K_0^2}$ coulant le long de l'axe du cylindre. L'expression de la force électrique est

$$X' = -\frac{2I_0 K_0}{\pi^2 I_0^2 + 4K_0^2} [2K_0(\kappa r) \cos 2\pi n t + \pi I_0(\kappa r) \sin 2\pi n t].$$

Pour de grandes valeurs de r cette expression peut s'écrire:

$$-\frac{2I_0 K_0}{\pi^2 I_0^2 + 4K_0^2} \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{\kappa r}} \cdot \cos(2\pi n t - \kappa r - \frac{\pi}{4}).$$

§ 8.

Si on pose la fonction auxiliaire dans le commencement du § 6 $\Phi = \frac{\cos 2\pi n(t - Ar)}{r}$, où r est la distance d'un point variable P à un point fixe, on trouve les forces électriques et magnétiques dues à un point double électrique oscillant avec le moment $\cos 2\pi nt$ (Hertz, Annales de Wiedemann, t. 36, p. 6), situé au point fixe et dont l'axe est dirigé suivant l'axe des x . Supposons une série continue de points doubles placée lelong d'une droite S parallèle à l'axe des y . La fonction auxiliaire devient dans ce cas

$$\int \frac{\cos 2\pi n(t - Ar)}{r} dy,$$

expression qui se réduit à $2K(x\varrho) \cos 2\pi nt + \pi I_1(x\varrho) \sin 2\pi nt$ (voir p. 22), où ϱ est la distance du point P à la droite sur laquelle les points électriques sont distribués.

La force magnétique dans ce cas est parallèle à l'axe des y et égale

$$A \frac{d^2\Phi}{dzdt} = x^2[2K_1(x\varrho) \sin 2\pi nt - \pi I_1(x\varrho) \cos 2\pi nt] \sin \varphi,$$

si φ est l'angle que la distance du point P à la droite S fait avec l'axe des x .

Si le moment des points doubles sur l'unité de longueur est $\mu \cos 2\pi n(t - \tau)$, et si l'axe des points doubles fait l'angle φ_0 avec l'axe des x et un angle droit avec l'axe des y , l'expression de la force magnétique devient:

$$x^2\mu[2K_1(x\varrho) \sin 2\pi n(t - \tau) - \pi I_1(x\varrho) \cos 2\pi n(t - \tau)] \sin(\varphi - \varphi_0).$$

Si le point P est très éloigné, on a approximativement

$$\varrho = r - (h \cos \Theta + k \sin \Theta),$$

où h et k sont les coordonnées du point d'intersection de la ligne S avec le plan des xz , et r , Θ sont les coordonnées de la projection du point P sur le plan des xz , ($x = r \cos \Theta$, $z = r \sin \Theta$). φ est dans ce cas égal à Θ . Nous posons $\varepsilon = h \cos \Theta + k \sin \Theta$.

La force magnétique causée par un système de droites le long desquelles l'électricité est distribuée de cette manière peut s'écrire pour des points très éloignés

$$x^2 \sum \mu [2K_1(x(r - \varepsilon)) \sin 2\pi n(t - \tau) - \pi I_1(x(r - \varepsilon)) \cos 2\pi n(t - \tau)] \sin(\Theta - \varphi_0).$$

La sommation se fait par rapport aux différentes valeurs de $\mu, h, k, \tau, \varphi_0$. D'après les propriétés connues des fonctions K_1 et I_1 , on peut écrire l'expression de cette manière

$$\frac{1}{Vr} \psi \cos 2\pi n(t - \tau - Ar),$$

où ψ et τ sont indépendants de r et fonctions seulement de Θ .

Nous examinerons maintenant les effets produits par l'introduction d'un cylindre conducteur dans le champ dans la direction de la force magnétique, que nous avons supposée parallèle à l'axe des y .

Supposons que les actions causées par le cylindre soient de la même espèce que celles dues au système électrique considéré tout à l'heure. La force magnétique causée par le cylindre doit alors être parallèle à l'axe des y . Nous posons

$$M' = \Phi' \cos 2\pi nt + \Phi'' \sin 2\pi nt,$$

où Φ' et Φ'' sont des fonctions de x et z , ou de r et Θ . Elles satisfont à l'équation différentielle

$$\frac{d^2 \Phi'}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Phi'}{dr} + \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \Phi'}{d\Theta^2} + \kappa^2 \Phi' = 0.$$

On peut donc poser

$$\Phi' = \Sigma (\alpha_s I_s(\kappa r) + \beta_s K_s(\kappa r)) \cos \Theta + \Sigma (\gamma_s I_s(\kappa r) + \delta_s K_s(\kappa r)) \sin s\Theta,$$

$$\Phi'' = \Sigma (\alpha'_s I_s(\kappa r) + \beta'_s K_s(\kappa r)) \cos s\Theta + \Sigma (\gamma'_s I_s(\kappa r) + \delta'_s K_s(\kappa r)) \sin s\Theta.$$

La forme que M' doit prendre pour de grandes valeurs de r entraîne pour les coefficients $\alpha, \beta, \dots$ les équations (4) du § précédent. On a donc

$$\alpha'_s = \frac{\pi}{2} \beta_s, \quad \beta'_s = -\frac{2}{\pi} \alpha_s, \quad \gamma'_s = \frac{\pi}{2} \delta_s, \quad \delta'_s = -\frac{2}{\pi} \gamma_s.$$

Pour les composantes de la force électrique causée par le cylindre, on a $A \frac{dX'}{dt} = \frac{dM'}{dz}$, $Y' = 0$, $A \frac{dZ'}{dt} = -\frac{dM'}{dx}$.

Donc

$$X' = \frac{1}{\kappa} \left[\frac{d\Phi'}{dz} \sin 2\pi nt - \frac{d\Phi''}{dz} \cos 2\pi nt \right],$$

$$Z' = -\frac{1}{\kappa} \left[\frac{d\Phi'}{dx} \sin 2\pi nt - \frac{d\Phi''}{dx} \cos 2\pi nt \right].$$

Pour $x^2 + z^2 = c^2$ ou $r = c$ on doit avoir

$$\frac{X + X'}{x} = \frac{Z'}{z} \text{ ou}$$

$$z[\cos 2\pi n(t - Az) + \frac{1}{x} \frac{d\Phi'}{dz} \sin 2\pi nt - \frac{1}{x} \frac{d\Phi''}{dz} \cos 2\pi nt] +$$

$$+ \frac{x}{z} \left[\frac{d\Phi'}{dx} \sin 2\pi nt - \frac{d\Phi''}{dx} \cos 2\pi nt \right] = 0$$

ou

$$\frac{d\Phi'}{dr} = -x \sin \Theta \sin (xc \sin \Theta),$$

$$\frac{d\Phi''}{dr} = x \sin \Theta \cos (xc \sin \Theta).$$

Pour les dérivées de I_s et K_s on a (Heine, pp. 213, 244) les relations:

$$\frac{dI_0}{dx} = -I_1, \quad 2 \frac{dI_s}{dx} = I_{s-1} - I_{s+1},$$

$$\frac{dK_0}{dx} = -K_1, \quad 2 \frac{dK_s}{dx} = K_{s-1} - K_{s+1}.$$

En différenciant par rapport à xc les séries pour $\cos (xc \sin \Theta)$ et $\sin (xc \sin \Theta)$ citées dans le § précédent on obtient

$$-\sin \Theta \sin (xc \sin \Theta) = -I_1(xc) + \Sigma(I_{2s-1}(xc) - I_{2s+1}(xc)) \cos 2s\Theta,$$

$$\sin \Theta \cos (xc \sin \Theta) = \Sigma(I_{2s}(xc) - I_{2s+2}(xc)) \sin (2s+1)\Theta.$$

En effectuant les différentiations dans $\frac{d\Phi'}{dr}$ et $\frac{d\Phi''}{dr}$ on obtient ces équations:

$$\gamma_s(I_{s-1} - I_{s+1}) + \delta_s(K_{s-1} - K_{s+1}) = 0,$$

$$\alpha_{2s+1}(I_{2s} - I_{2s+2}) + \beta_{2s+1}(K_{2s} - K_{2s+2}) = 0,$$

$$\alpha_0 I_1 + \beta_0 K_1 = I_1,$$

$$\alpha_{2s}(I_{2s-1} - I_{2s+1}) + \beta_{2s}(K_{2s-1} - K_{2s+1}) = 2(I_{2s-1} - I_{2s+1}),$$

$$\alpha'_0 I_1 + \beta'_0 K_1 = 0,$$

$$\alpha'_s(I_{s-1} - I_{s+1}) + \beta'_s(K_{s-1} - K_{s+1}) = 0,$$

$$\gamma'_{2s}(I_{2s-1} - I_{2s+1}) + \delta'_{2s}(K_{2s-1} - K_{2s+1}) = 0,$$

$$\gamma'_{2s+1}(I_{2s} - I_{2s+2}) + \delta'_{2s+1}(K_{2s} - K_{2s+2}) = 2(I_{2s} - I_{2s+2}).$$

J'ai omis ici l'argument xc . Ces équations donnent:

$$\alpha_{2s+1} = \beta_{2s+1} = \gamma_{2s} = \delta_{2s} = 0,$$

$$\alpha_0 = \frac{\pi^2 I_1^2}{\pi^2 I_1^2 + 4K_1^2}, \quad \beta_0 = \frac{4K_1 I_1}{\pi^2 I_1^2 + 4K_1^2},$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{2s} &= \frac{\pi^2(I_{2s}-1 - I_{2s+1})^2}{\pi^2(I_{2s}-1 - I_{2s+1})^2 + 4(K_{2s}-1 - K_{2s+1})^2} \\
\beta_{2s} &= \frac{8(I_{2s}-1 - I_{2s+1})(K_{2s}-1 - K_{2s+1})}{\pi^2(I_{2s}-1 - I_{2s+1})^2 + 4(K_{2s}-1 - K_{2s+1})^2} \\
\gamma_{2s+1} &= -\frac{4\pi(I_{2s} - I_{2s+2})(K_{2s} - K_{2s+2})}{\pi^2(I_{2s} - I_{2s+2})^2 + 4(K_{2s} - K_{2s+2})^2} \\
\delta_{2s+1} &= \frac{4\pi(I_{2s} - I_{2s+2})^2}{\pi^2(I_{2s} - I_{2s+2})^2 + 4(K_{2s} - K_{2s+2})^2}.
\end{aligned}$$

On a donc pour Φ' cette expression:

$$\begin{aligned}
\Phi' &= \frac{I_1(\pi^2 I_1 I_0(xr) + 4K_1 K_0(xr))}{\pi^2 I_1^2 + 4K_1^2} + \\
&+ \sum \frac{2(I_{2s}-1 - I_{2s+1})[\pi^2(I_{2s}-1 - I_{2s+1})I_{2s}(xr) + 4(K_{2s}-1 - K_{2s+1})K_{2s}(xr)] \cos 2s\Theta}{\pi^2(I_{2s}-1 - I_{2s+1})^2 + 4(K_{2s}-1 - K_{2s+1})^2} \\
&- 4\pi \sum \frac{(I_{2s} - I_{2s+2})[K_{2s} - K_{2s+2}] I_{2s+1}(xr) - (I_{2s} - I_{2s+2})K_{2s+1}(xr)}{\pi^2(I_{2s} - I_{2s+2})^2 + 4(K_{2s} - K_{2s+2})^2} \sin(2s+1)\Theta.
\end{aligned}$$

et pour Φ'' :

$$\begin{aligned}
\Phi'' &= \frac{2\pi I_1(K_1 I_0(xr) - I_1 K_0(xr))}{\pi^2 I_1^2 + 4K_1^2} \\
&+ 4\pi \sum \frac{(I_{2s}-1 - I_{2s+1})[(K_{2s}-1 - K_{2s+1})I_{2s}(xr) - (I_{2s}-1 - I_{2s+1})K_{2s}(xr)] \cos 2s\Theta}{\pi^2(I_{2s}-1 - I_{2s+1})^2 + 4(K_{2s}-1 - K_{2s+1})^2} \\
&+ 2\sum \frac{(I_{2s} - I_{2s+2})[\pi^2(I_{2s} - I_{2s+2})I_{2s+1}(xr) + 4(K_{2s} - K_{2s+2})K_{2s+1}(xr)] \sin(2s+1)\Theta}{\pi^2(I_{2s} - I_{2s+2})^2 + 4(K_{2s} - K_{2s+2})^2}.
\end{aligned}$$

Si xr est très petit, on peut se contenter du premier terme de Φ' et de Φ'' . On a donc, si de plus on néglige I_1 en comparaison de K_1 ,

$$M' = \Phi' \cos 2\pi nt + \Phi'' \sin 2\pi nt = \frac{2I_1 K_1}{\pi^2 I_1^2 + 4K_1^2} (2K_0(xr) \cos 2\pi nt + \pi I_0(xr) \sin 2\pi nt).$$

L'expression a la même forme que le potentiel vecteur d'un courant dont l'intensité serait $\frac{2I_1 K_1}{\pi^2 I_1^2 + 4K_1^2} \cos 2\pi nt$. Puisque $K_1(x)$ pour $x=0$ est infini comme x^{-1} , K_1 est très grand, et comme K_1 entre en carré dans le dénominateur, l'action du cylindre dans ce cas est très insignifiante.

